

**MÉTODO GRÁFICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS
FRACCIONES MEDIADO CON GEOGEBRA Y LA TEORÍA DE LOS
REGISTROS DE REPRESENTACIÓN**



DIANA MARCELA PARRA CORTÉS

**UNIVERSIDAD DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MAESTRÍA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

2020

**MÉTODO GRÁFICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES
MEDIADO CON GEOGEBRA Y LA TEORÍA DE LOS REGISTROS DE
REPRESENTACIÓN**

Trabajo de grado para obtener el título de Magister en Didáctica de las matemáticas

DIANA MARCELA PARRA CORTÉS

Asesor:

CARLOS GERMAN SÁNCHEZ

**UNIVERSIDAD DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MANIZALES, COLOMBIA
2020**

Agradecimientos

Gracias a Dios por permitirme vivir cada día y formar parte de esta hermosa familia con la que me ha premiado, por darme la oportunidad de obtener un logro más en mi vida.

Este nuevo logro, es en gran parte gracias a ustedes que he podido concluir con éxito un proyecto, que parecía una tarea de nunca acabar.

Gracias a mis compañeros y amigos que con una voz de aliento me animaban a seguir adelante y a no desistir.

A la Universidad de Caldas, mi alma mater en este proceso de formación en maestría.

Dedicatoria

Quiero dedicar mi tesis con todo mi amor y cariño a mi madre Luz Mary, por ser esa persona incondicional para conmigo; a mis hijos por ser el motor que me motivan a ser cada día mejor y superarme en todos los aspectos; a mi hermana por apoyarme sin esperar nada a cambio.

A toda mi familia que estuvieron a mi lado apoyándome y lograron que este sueño se haga realidad.

Resumen

El aprendizaje de las fracciones sigue siendo un tema complejo de enseñar y por ende difícil de entender, debido en gran parte al método usado en la escuela. Este problema se presenta con mucha regularidad en todas las aulas de clase, y a pesar de que son variadas las estrategias para mejorar los procesos de aprendizaje, muchos maestros no cambian la manera de enseñarlas debido a que lo restringen a una sola representación, que es la numérica.

Este trabajo de investigación propende por el uso de otro registro que puede ser más llamativo para el aprendizaje como es el gráfico empleando un software dinámico llamado GeoGebra que ayuda al proceso enseñanza-aprendizaje, despertando el interés y la motivación de los estudiantes.

La investigación se desarrolló en la Institución Técnica Agropecuaria el Guayabo de Fresno Tolima, con un grupo de 5 estudiantes, es importante anotar que la pandemia del Covid – 19, restringió el uso de toda la población debido a la poca conectividad por ser una escuela pública de carácter rural, lo que llevó a realizar un estudio cualitativo de diseño Tipo de caso. El objetivo de la investigación consistió en analizar el resultado que produce en los estudiantes la interacción con el software GeoGebra y los Registros de Representación como mediadores didácticos en el aprendizaje de las fracciones, para ello se diseñaron un pre-test y un pos-test y una guía de intervención que constaba de cuatro hojas de trabajos diseñadas con el software GeoGebra y los RRS, al final los resultados mostraron como los estudiantes mejoraron notoriamente en conceptos relacionados con las operaciones básicas, las nociones de fracción y la resolución de problemas cotidianos.

Palabras clave: Registros de representación; GeoGebra; fracciones.

Abstrac

Learning fractions remains a complex subject to teach and therefore difficult to understand, due in large part to the method used at school. This problem occurs very regularly in all classrooms, and although the strategies to improve learning processes are varied, many teachers do not change the way of teaching them because they restrict it to a single representation, which is the numerical.

This research work tends to use another register that may be more striking for learning, such as the graph, using dynamic software called GeoGebra that helps the teaching-learning process, awakening the interest and motivation of students.

The research was developed at the Guayabo Agricultural Technical Institution in Fresno Tolima, with a group of 5 students, it is important to note that the Covid-19 pandemic restricted the use of the entire population due to poor connectivity due to being a public school rural in nature, which led to a qualitative study of case type design. The objective of the research was to analyze the result produced in the students by the interaction with the GeoGebra software and the Representation Records as didactic mediators in the learning of fractions, for this a pre-test and a post-test were designed and An intervention guide that consisted of four worksheets designed with GeoGebra software and RRS, in the end the results showed how the students improved significantly in concepts related to basic operations, notions of fraction and solving everyday problems.

Keywords: Representation records; GeoGebra; fractions.

Tabla de Contenidos

Introducción	13
Capítulo 1.....	16
1. Planteamiento de la Investigación.	16
1.1 Planteamiento del Problema.	16
1.1.1 Pregunta de investigación	18
1.2 Objetivos	18
1.2.1 Objetivo general.....	18
1.2.2 Objetivos específicos	19
1.3 Justificación.....	19
1.4 Limitaciones del Estudio.....	20
Capítulo 2.....	22
Marco Referencial	22
2.1 Marco de Antecedentes.....	22
2.2 Marco Legal	24
2.2.1 Ley general de educación.....	24
2.2.2 Estándares básicos de aprendizaje	25
2.2.3 Lineamientos curriculares de matemáticas	26
2.2.4 Los derechos básicos de aprendizaje (DBA).....	26
2.3 Marco Teórico	27
2.3.1 Las TIC en la enseñanza de las matemáticas	27
2.3.2 El software GeoGebra.....	28
2.3.3 La didáctica de la matemática	30

2.3.4 Los registros de representación semiótica (RRS).....	32
2.4 Marco conceptual.....	36
2.4.1 Los números racionales.....	36
2.4.1.1 Definición de los números racionales.....	37
2.4.1.2 Método gráfico para realizar las operaciones básicas con fracciones.....	39
Capítulo 3.....	47
Metodología.....	47
3.1 Enfoque de la Investigación.....	47
3.2 Tipo de Investigación.....	47
3.3 Método de Investigación.....	48
3.4 Población y Muestra.....	49
3.4.1 Población.....	49
3.4.2 Muestra.....	54
3.5 Diseño de la Investigación (Fases de la investigación).....	54
3.6 Instrumentos.....	55
3.6.1 Cuestionario de conocimientos.....	55
3.6.2 Las hojas de trabajo con GeoGebra.....	56
3.6.3 Los aplicativos diseñados con GeoGebra.....	56
3.6.4 Encuesta sobre la aplicabilidad del instrumento mediado con TIC.....	57
3.7 Prueba de validez de los instrumentos.....	57
Capítulo 4.....	60
Resultados de la Investigación.....	60
4.1 Prueba de validez de los resultados de los instrumentos.....	60

4.2 Resultados de la prueba diagnóstico versus prueba final sobre conceptos de fraccionarios y sus operaciones.	60
4.3 Análisis de los resultados obtenidos con las hojas de trabajo de GeoGebra.....	62
4.3.1 Análisis de la hoja de trabajo 1: Suma.....	62
4.3.2 Análisis de la hoja de trabajo 2: Resta.....	66
4.3.3 Análisis de la hoja de trabajo 3: Multiplicación.....	68
4.3.4 Análisis de la hoja de trabajo 4: División.....	71
4.4 Resultados del uso del aplicativo diseñado con GeoGebra.....	73
Capítulo 5.....	75
Conclusiones y Recomendaciones.....	75
5.1 Conclusiones.....	75
Referencias.....	78
Anexos.....	83
Anexo A: Cuestionario.....	83
Anexo B: Hoja de Trabajo 1.....	87
Anexo C: Hoja de Trabajo 2.....	93
Anexo D: Hoja de trabajo 3.....	99
Anexo E: Hoja de trabajo 4.....	105
Anexo F: Encuesta de satisfacción del uso de GeoGebra.....	110
Anexo G: Carta para la validación de los instrumentos.....	112
Anexo H: Evidencias fotográficas del trabajo.....	116

Lista de Figuras

Figura 1. Presentación gráfica de un entorno con GeoGebra30

Figura 2. Representación de un sistema semiótico (Semiosis - Noesis)35

Figura 3. Representación de la unidad en distintas medidas. Concepto de fracción.....36

Figura 4. Formas de representación de dos fracciones con el método geométrico40

Figura 5. Conformación de la operación suma de fracciones por el método geométrico .41

Figura 6. Ejemplo de una suma de fracciones por el método gráfico41

Figura 7. Posición correcta minuendo mayor que sustraendo para la operación de la resta
.....42

Figura 8. Procedimiento antes de realizar la operación diferencia de fracciones43

Figura 9. Ejemplo de una resta de fracciones por el método gráfico43

Figura 10. Ejemplo de una multiplicación de fracciones por el método gráfico.44

Figura 11. Procedimiento para realizar la multiplicación de una fracción45

Figura 12. Ejemplo de una multiplicación de fracciones por el método gráfico45

Figura 13. Procedimiento para realizar la división de una fracción46

Figura 14. Localización del municipio de Fresno en el departamento del Tolima.50

Figura 15. Vista área de la Institución educativa técnica agropecuaria el Guayabo53

Figura 16. Portada principal de la Institución educativa53

Figura 17. Pantalla inicial de cada uno de los aplicativos diseñados para el proyecto57

Figura 18. Resultados obtenidos de prueba diagnóstica versus prueba final.....61

Figura 19. Resultado de la operación suma de fracciones del Est 4.65

Figura 20. Procedimientos realizados por el estudiante 1 para operar con la resta de fracciones.68

Figura 21. Resultados pictóricos obtenidos por los estudiantes de la operación producto de fracciones.....71

Figura 22. Resultados sobre el uso de los aplicativos con GeoGebra.....74

Lista de Tablas

Tabla 1. Fases de la investigación	54
Tabla 2. Rúbrica para evaluación de los instrumentos	58
Tabla 3. Valores para el grado de validez del instrumento.....	59
Tabla 4. Resultados de las hojas de trabajo 1: Suma.....	63
Tabla 5. Resultados de las hojas de trabajo 2: Resta	66
Tabla 6. Resultados de las hojas de trabajo 3: Multiplicación.....	69
Tabla 7. Resultados de las hojas de trabajo 4: División	72

Introducción

El presente trabajo espera ser una ayuda a los docentes en la búsqueda de estrategias didácticas para la enseñanza de las fracciones, igualmente beneficiará a los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones de una forma más dinámica y activa por medio del software GeoGebra y los Registros de Representación Semiótica.

Para lograr lo anterior se hizo un rastreo bibliográfico exhaustivo empezando con los antecedentes donde se muestra que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones siguen teniendo dificultades en la educación básica. Una de las causas es que son poco usadas en situaciones de la vida real, por lo tanto, los estudiantes cuentan con escasos conocimientos previos cuando inician el estudio de este contenido matemático en la escuela primaria (Perera y Valdemoso, 2009); igualmente citando a Fonseca, Hernández, y Mariño (2017), plantean que es posible elaborar una estrategia didáctica que permita implementar el enfoque metodológico mejorando el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante la resolución de problemas de números fraccionarios a partir del uso del software matemático GeoGebra en estudiantes de educación secundaria.

En la parte legal, el presente trabajo está delimitado por la Ley general de educación de acuerdo con la ley 115 (Art 23) sobre las áreas obligatorias y fundamentales; los derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2006) los lineamientos y estándares curriculares en el área de las matemáticas.

El diseño metodológico de este trabajo tiene un enfoque cualitativo, dicho enfoque se caracteriza por que los investigadores pretenden encontrar una situación social como un todo, el tipo de investigación en la que se enmarca este trabajo de investigación, es la investigación

acción en educación, que de acuerdo con Elliott (1990) se relaciona con los problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores, en lugar de los problemas teóricos definidos por los investigadores puros en el entorno de una disciplina del saber.

La población que se tomó en cuenta fueron los estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria El Guayabo sede principal, del municipio de Fresno, el grupo lo conformaron 24 estudiantes, del cual se tomó una muestra de 5 estudiantes, debido a la pandemia ya que no se pudo realizar las hojas de trabajo con todo el grupo, sino con un grupo pequeño de estudiantes, por problemas de conectividad y señal.

Los instrumentos diseñados para la recolección de datos fueron dibujados respondiendo a cada una de las fases de la investigación, por ello se recurrieron a varios tipos. En primer lugar se utilizó el cuestionario o test, posteriormente se utilizaron las hojas de trabajo con GeoGebra y finalmente se aplicó un instrumento que sirviera para la evaluación del instrumento de intervención, en este caso el aplicativo GeoGebra.

Al final estos resultados concuerdan con lo propuesto por Cruz y Puentes (2012) que afirman como al utilizar el software GeoGebra este le da un carácter de dinamismo al aprendizaje, convirtiéndose en un recurso que permite a los estudiantes realizar acciones que de otra manera son imposibles o difíciles mediante otros métodos, por ejemplo con el uso del lápiz y el papel, por otro lado el programa GeoGebra permite comprobar si la solución de un problema es correcta o incorrecta por el mismo alumno, sin la ayuda del profesor, promoviendo el aprendizaje autónomo con relación a los métodos de enseñanza tradicionales.

El trabajo escrito se divide en cinco capítulos así:

El primer capítulo se denomina Planteamiento del problema, en él se puede visorar toda la problemática, la pregunta problema, los objetivos de la investigación, la justificación y las limitaciones del estudio.

El segundo capítulo hace relación al marco referencial, dónde se realizó el estado de arte en cuestión y se buscaron algunas referentes de ley importantes, así mismo se construyó el marco teórico de acuerdo con los RRS y la utilidad del software GeoGebra, finalizando con el marco didáctico que es el asunto fundamental de esta propuesta.

El tercer capítulo es la metodología, en la que se relaciona la fundamentación teórica del método usado para obtener toda la información, dentro de este capítulo se desarrolló el enfoque, el tipo y el diseño de la investigación, se relaciona la población y muestra, las fases seguidas durante el proceso, así mismo se describen cada uno de los instrumentos empleados detallados con sus particularidades y sus objetivos.

En el capítulo 4 que son los resultados, se muestran los gráficos y tablas donde se relacionan los hallazgos obtenidos

Finalmente, en el capítulo 5 aparecen las conclusiones y las recomendaciones.

Capítulo 1.

1. Planteamiento de la Investigación.

1.1 Planteamiento del Problema.

El aprendizaje de las fracciones en el nivel escolar ha mostrado serias dificultades, asociadas con la enseñanza y el aprendizaje, dichas dificultades obedecen a varios factores que responden al uso del lenguaje, las distintas representaciones que estos suelen tomar de acuerdo al contexto, las creencias de los estudiantes acerca de un número que representa la parte – todo y a la misma complejidad de las operaciones matemáticas que estos conllevan cuando se utilizan representaciones numéricas.

De acuerdo con Goutard (1964, como se citó en González, 2015):

Las fracciones no son algo que hay que saber, si no, algo que hay que comprender, y no es posible comprenderlas antes de tener una suficiente experiencia con ellas (...) la clave del éxito en la inicialización al estudio de las fracciones es la variedad, el cambio, la diversidad, el punto de vista (p. 14).

Es importante anotar que la mayoría de estas dificultades conllevan errores, Socas (2007), afirma que los errores aparecen en el trabajo de los alumnos, sobre todo cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben, por otro lado Matz (1980, como se citó en Socas, 2007), dice lo siguiente: “los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 37). Así, entendemos que el error va a tener distintas procedencias, pero siempre, se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de la falta de conocimiento o de un despiste.

En Colombia se ha venido realizando esfuerzos importantes en el mejoramiento y calidad de la educación matemática. Con la aparición de los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998), se logró que los procesos y conocimientos básicos de las matemáticas fueran categorizados en cinco pensamientos claves: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, esto implicó además un fuerte cambio didáctico en los maestros obligándolos a repensar su práctica y a la implementación de estrategias de enseñanza que pasaran de un modelo repetitivo a un modelo constructivista. Con los lineamientos aparecieron igualmente los estándares básicos de aprendizaje (MEN, 2006) que son los parámetros mínimos que todo estudiante debe saber hacer y lograr, respondiendo fundamentalmente a un proceso inclusivo. En el año 2016 el MEN propone los Derechos básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) que son “un conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar (p. 3). Si bien estas directrices han generado cambios estructurales en los currículos, esto no obedece a los cambios didácticos esperados y se nota cómo la mayoría de los maestros siguen enseñando de manera tradicional las matemáticas, el asunto no es criticar el antiguo modelo que también tiene sus bondades, es buscar otras formas de enseñar que favorezcan el aprendizaje significativo de los estudiantes. Para el caso particular del aprendizaje de las fracciones son pocas las estrategias utilizadas, si bien en los años de básica primaria los maestros hacen uso de varias representaciones, las operaciones entre fracciones siguen circunscribiéndose al pensamiento numérico, o sea, al uso de algoritmos, y no se comprende el número como una parte de un todo, tanto es así que los estudiantes que ingresan a los niveles de educación superior siguen viéndolos como algo *aterrador*.

Con lo expuesto anteriormente se hace necesario implementar en el aula, procesos de enseñanza diferentes que favorezcan la comprensión y utilicen diferentes Sistemas de

Representación de las fracciones, esto facilitaría su aprendizaje y ulterior comprensión, como se diría llegar a un aprendizaje en profundidad.

El aprendizaje de los fraccionarios y el caso particular de los estudiantes de sexto grado de educación básica secundaria de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria El Guayabo de Fresno – Tolima, presentan un patrón semejante al contexto señalado anteriormente, es urgente establecer opciones didácticas que faciliten la aprehensión de nuevos conocimientos cuando se les presentan dificultades por diferentes motivos, que pueden ir desde la falta de conocimientos previos a la reestructuración de lo que ya saben.

1.1.1 Pregunta de investigación

De acuerdo a la definición de la problemática y para responder al contexto asociado al problema descrito, esta es la pregunta de investigación a la que se quiere dar respuesta:

¿Qué resultado produce el uso del software GeoGebra y la teoría de los Registros de Representación como mediadores didácticos en el aprendizaje de las fracciones en un grupo de estudiantes de grado sexto de la I.E. Técnica Agropecuaria El Guayado de Fresno - Tolima?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Analizar el resultado que produce la interacción con el software GeoGebra y los Registros de Representación como mediadores didácticos en el aprendizaje de los estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria El Guayabo de Fresno – Tolima.

1.2.2 Objetivos específicos

- Diagnosticar el nivel inicial del grupo de estudiantes seleccionados del grado sexto con relación a los conceptos que tienen sobre las operaciones fundamentales de las fracciones.
- Diseñar una secuencia didáctica mediada con GeoGebra y los Registros de Representación que permita la interacción de los estudiantes con las cuatro operaciones básicas de las fracciones.
- Describir los resultados y las dificultades que producen el uso del software GeoGebra y los Registros de Representación como mediador en el aprendizaje de las operaciones básicas con fracciones.
- Evaluar el resultado del uso del software GeoGebra y los Registros de Representación en el aprendizaje de las operaciones básicas de las fracciones.

1.3Justificación

El presente proyecto de investigación buscará generar estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de las cuatro operaciones básicas de las fracciones con los estudiantes de sexto grado de la institución técnica agropecuaria el Guayabo a través de una secuencia didáctica haciendo uso de los Registros de Representación Semiótica de ahora en adelante RRS mediada con un aplicativo diseñado con el software GeoGebra. Este trabajo tendrá gran importancia didáctica ya que son muchas las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de resolver problemas que involucren las fracciones(González, 2015), estas dificultades pueden ser superadas haciendo uso de estrategias didácticas innovadoras, tal es este caso que integrará el software GeoGebra y los RRS para el mejoramiento del aprendizaje de los números

fraccionarios. Históricamente el aprendizaje de las fracciones ha sido visto como uno de los casos más particulares en el estudio de la didáctica de las matemáticas debido a su complejidad, es así como la mayoría de estudiantes no comprenden el concepto de todo parte y las operaciones fundamentales (Castaño-Arbeláez y García-Castro, 2014).

Por otro lado la aplicación de una secuencia didáctica mediada con RRS y GeoGebra ayudará a develar cuáles son los principales obstáculos que presentan los estudiantes para aprender los fraccionarios, estos obstáculos bien pueden obedecer a vacíos en las operaciones básicas y debido a esto les será más difícil comprender los fraccionarios y más aún las operaciones con los mismos, de otra manera pueden interferir las estrategias que tengan los docentes para enseñar a los estudiantes y la falta de motivación por parte de docentes y estudiantes.

El presente trabajo buscará ayudar además a los docentes en la búsqueda de estrategias didácticas para la enseñanza de los fraccionarios, igualmente beneficiará a los estudiantes en el aprendizaje de los fraccionarios de una forma más dinámica y activa por medio del software GeoGebra.

Este trabajo servirá a docentes de educación básica secundaria, investigadores en didáctica y a estudiantes que quieran enseñar y aprender de una forma más dinámica, innovadora y en dónde el aprendizaje se centre en los estudiantes y no en la mera repetición mecánica de conceptos por parte de los maestros.

1.4 Limitaciones del Estudio

Este trabajo se realizó con un grupo de estudiantes (5) del grupo sexto de la institución educativa técnica y agropecuaria El Guayabo sede principal, de Fresno Tolima. Los estudiantes

provenían de estratos socioeconómicos 1, 2, con concurrencia del área rural de la vereda el Guayabo y veredas aledañas. La implementación del trabajo se realizó durante el segundo semestre académico del año 2020, precisamente cuando empezó la pandemia del COVID-19, pero la prueba diagnóstica se realizó antes de empezar la pandemia. Esta problemática obligó a realizar el proyecto de implementación desde las casas de los estudiantes lo que dificultó en gran medida la aplicación de los instrumentos, debido a la falta de conectividad y a la poca o casi nula infraestructura tecnológica (Computadores) por parte de los estudiantes. Debido a esta situación de una muestra total de 24 estudiantes que iban a ser intervenidos, se recurrió a un estudio de caso con los pocos estudiantes que tenían acceso a computadores en sus hogares. Esta es la limitación más sobresaliente de este estudio pues la meta era impactar a la población total de estudiantes y analizar como el uso de los RRS y el software GeoGebra favorecía el aprendizaje de las fracciones.

Capítulo 2.

Marco Referencial

2.1 Marco de Antecedentes

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones siguen teniendo dificultades en la educación básica. Las causas suelen atribuírsele a que se usan muy poco en situaciones de la vida real, lo que hace que los niños posean escasos conocimientos previos al inicio del estudio de este contenido matemático en la escuela primaria, otra dificultad radica en la enseñanza del lenguaje de las fracciones en edades muy tempranas, así como la implementación de tareas abstractas relacionadas a estos números. (Perera y Valdemoros, 2009).

A continuación se enumeran algunos trabajos de investigación sobre el uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios, tal es el caso Nabors (2003, como se citó en Perera y Valdemoros2009), el cual implementó un experimento de enseñanza constructivista con cuatro estudiantes que interactuaron con un micromundo computacional usado para resolver tareas de razonamiento fraccionario.

Otros estudios efectuados en torno a la enseñanza de las fracciones se pueden citar en (Steffe, 2002; Tzur, 2004), en los cuales los niños interactúan entre ellos y con el investigador, donde plantean la interacción con fracciones como actividad importante para la comprensión de este contenido (Perera y Valdemoros, 2009).

Por otro lado Fonseca, Hernández, y Mariño (2017), destacan que es posible elaborar una estrategia didáctica que permita implementar el enfoque metodológico CPA mejorando el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante la resolución de problemas de números fraccionarios a partir del uso del software matemático GeoGebra en estudiantes de educación secundaria.

Para Prieto (2016) el software GeoGebra fue de gran utilidad ya que este dispone, de una zona de trabajo con cuadrados congruentes que facilita el reconocimiento de totalidades y porciones, de estas totalidades se derivan el cálculo de ciertas medidas requeridas en la construcción. Las ventajas en la utilización de la cuadrícula aumentaron con el apoyo del acercamiento y alejamiento a zonas específicas de la imagen. A través de estas opciones se establece la equivalencia entre fracciones como consecuencia de nuevas particiones o el reagrupamiento de porciones iguales de la cuadrícula, que se muestra en la interfaz del GeoGebra de manera automática.

En su trabajo de maestría Lara (2012) muestra que GeoGebra para la enseñanza de los números fraccionarios, le permiten al estudiante ver y manipular los objetos matemáticos y sus relaciones de una manera inimaginable con los recursos tradicionales como son el lápiz y el papel, lo que permite la exploración, el descubrimiento, argumentando también que la tecnología no es la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero si es una herramienta que además de promover nuevas formas didácticas que aporten al aprendizaje del estudiante, también puede influir en la formación de los profesores.

Ahora definiremos algunos trabajos de investigación relacionados con los RRS, de acuerdo con Duval (1995), afirma que no debe confundirse los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que estos se organizan. La lengua natural, una notación, un símbolo, un esquema o una gráfica representan a un objeto matemático.

Según Macías (2014) en su trabajo “Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje” concluyó que una de las características más importantes de la actividad matemática es la diversidad de registros de representación semiótica

que es necesario movilizar en la enseñanza y aprendizaje de un determinado concepto u objeto matemático. Esto es debido a que, únicamente, a través de tales representaciones, podemos tener acceso a los objetos de conocimiento en matemáticas.

Así mismo Varettoni y Elichiribehety (2010) en su trabajo titulado: “Los registros de representaciones que emplean docentes de Educación Primaria: un estudio exploratorio”; muestra en los resultados que la mayoría de los docentes utilizan registros de representación simbólicos aritméticos para resolver el problema y que en muy pocos casos pueden cotejar más de un sistema de representación. Algunos docentes se apoyan en otro sentido de las fracciones, en el significado parte-todo, esta posibilidad es considerada en dos trabajos como único recurso de resolución. Es importante tener en cuenta que en estos casos también es posible de acuerdo a las particiones realizadas, obtener diferentes escrituras fraccionarias asociadas a las mismas y por lo tanto convertir de diferentes maneras un registro figurativo en un registro simbólico.

2.2 Marco Legal

A continuación se describen algunas leyes y decretos que son la base legal de esta investigación:

2.2.1 Ley general de educación

De acuerdo con la ley 115 (Art 23) Sobre las áreas obligatorias y fundamentales: para el logro de los objetivos de la educación básica se establecen como áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y de la formación a los grupos de áreas que comprenden un mínimo del 80% del plan de estudios, donde se encuentran incluidas las matemáticas (Congreso de la República, 1994)

2.2.2 Estándares básicos de aprendizaje

De acuerdo con los derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2006) el sentido de la expresión ser matemáticamente competente está íntimamente relacionado con los fines de la educación matemática de todos los niveles educativos y con la adopción de un modelo epistemológico sobre las propias matemáticas. La adopción de un modelo epistemológico coherente para dar sentido a la expresión ser matemáticamente competente requiere que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas.

Las matemáticas son un proceso acumulado y reorganizado de todas las actividades de las comunidades de profesionales de la educación matemática, dichos resultados se configuran como un cuerpo de conocimientos ligados y se evidencian en cada uno de los postulados, axiomas y teoremas entre otros. Gracias a lo anterior se puede presuponer los siguientes aspectos:

- La práctica, que expresa condiciones sociales de relación de la persona con su entorno, y contribuye a mejorar su calidad de vida y su desempeño como ciudadano.
- La formal, constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones, la cual se expresa a través del lenguaje propio de las matemáticas en sus diversos registros de representación. (MEN, 2006, p. 56)

Los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

2.2.3 Lineamientos curriculares de matemáticas

Las matemáticas, como en otras áreas del conocimiento, están presentes en el proceso educativo para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes con la perspectiva de que puedan asumir los retos del siglo XXI. Se propone pues una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicable y útil para aprender cómo aprender(MEN, 1998).

Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista.

De acuerdo con esta visión global(MEN, 1998), se proponen tres grandes aspectos:

Procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje.

Conocimientos básicos que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende (p. 63)

2.2.4 Los derechos básicos de aprendizaje (DBA)

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) presenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), para los diferentes grados y áreas.

De acuerdo con los Derechos Básicos de Aprendizaje, para el grado sexto en el área de matemáticas, los estudiantes han de aprender en este grado lo siguiente:

- Interpreta los números enteros y racionales (en sus representación de fracción y de decimal) con sus operaciones, en diferentes contextos, al resolver problemas de variación, repartos, particiones, estimaciones, etc. Reconoce y establece diferentes relaciones (de orden y equivalencia y las utiliza para argumentar procedimientos).
- Utiliza las propiedades de los números enteros y racionales y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas.(MEN, 2016)

2.3 Marco Teórico

2.3.1 Las TIC en la enseñanza de las matemáticas

Últimamente las Tecnologías de la información y Comunicación (TIC) han tenido un gran impacto en las clases de matemática, puesto que nos hemos basado en sus instrumentos para lograr desarrollar nuestras clases de forma dinámica e interactiva es así como las TIC producen algunos cambios a los problemas que presenta el proceso de enseñanza- aprendizaje. Estas nos facilitan diferentes formas de simbolizar situaciones problemáticas que les ayuda a los alumnos a ampliar habilidades de resolución de problemas y una mayor perspicacia de los conocimientos matemáticos a los que se enfrentan en la cotidianidad. El Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos (NCTM) expresa que “cuando las herramientas tecnológica están disponibles, los estudiantes pueden concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas” (NTCM, 2000, p. 25)

De acuerdo con el informe PISA sobre el Marco de evaluación y análisis para el desarrollo(OCDE, 2017)se requieren estudiantes matemáticamente proporcionados que posean:

la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OCDE, 2017, p.3). Las TIC les permite a los estudiantes ser activos en su aprendizaje y complementar los conceptos, viéndolos de una forma real.

Según indica Castillo (2008) el Consejo Estadounidense de Profesores de Matemática (NCTM) establece una serie de pautas relativas a la educación matemática con respecto a la tecnología afirmando “resulta esencial en la enseñanza y el aprendizaje, ya que influye en las matemáticas que se enseñan y mejoran el proceso de aprendizaje de los estudiantes” (p. 173), realizando el papel de las TIC para la mejora de los aprendizajes a partir de una enseñanza efectiva sustentada desde el paradigma constructivista.

Vivimos épocas de intensas transformaciones. Progresamos, forzosamente, hacia la “Sociedad de la Información y el Conocimiento”(Pozo, 2000, p. 512), en la cual las TIC están cada vez más presentes en las actividades diarias de los ciudadanos, Así como afirma Téliz, (2014, citando a Lugo y Kelly, 2010) donde dicen que dichas tecnologías han venido para quedarse.

2.3.2 El software GeoGebra

GeoGebra es un software denominado dinámico que se usa para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en todos los niveles de educación. Combina de una manera interactiva, geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto sencillo con un potente nivel operativo. Ofrece diversas representaciones de objetos matemáticos desde cada una de sus perspectivas como lo son: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización de tablas y

planillas de cálculo tipo hoja excel, vinculadas dinámicamente(González, s.f.).

“GeoGebra Classic 5 es en su origen la tesis de Markus Hohenwarter, con el objeto de crear una calculadora de uso libre para trabajar el Álgebra y la Geometría”(González, s.f., párr. 2). Este proyecto se inició en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo (Austria). Se continúa hoy, en la Universidad de Boca Ratón, Florida Atlantic University (USA) dónde además se han desarrollado otras versiones, por lo que GeoGebra Classic ha sido diseñado con mentalidad colaborativa. A continuación se nombran algunas características fundamentales del software:

- Es gratuito su licencia es creative commons
- Es fácil de usar por lo tanto de aprender, ya que cada objeto tiene dos representaciones, una en la Vista Gráfica (Geometría) y otra en la Vista Algebraica (Álgebra).
- Todos los objetos que se incorporan en la interfaz gráfica le corresponde una expresión en la ventana algebraica y viceversa.
- Posee características propias de los programas de Geometría Dinámica (DGS)
- Incorpora su propia Hoja de Cálculo.
- Facilidad para crear una página web dinámica a partir de la construcción
- Permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos de la observación directa.
- Está disponible en todos los idiomas.(González, s.f. párr 3-6)

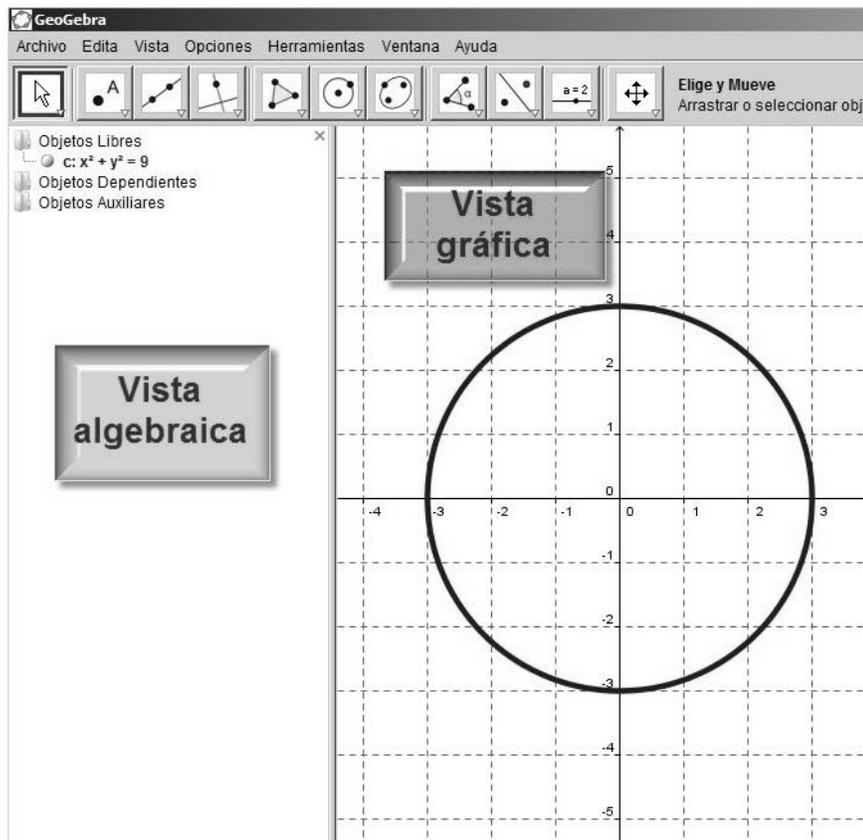


Figura 1. Presentación gráfica de un entorno con GeoGebra

Descripción: En la gráfica se observa la manera como GeoGebra realiza la representación de un objeto matemático por medio de la vista algebraica y la vista gráfica

Fuente: (González, s.f.)

2.3.3 La didáctica de la matemática

La educación matemática y en especial la didáctica se puede mirar desde tres puntos de vista distintos, en primer lugar, educación matemática como el conjunto de:

Conocimientos, artes, destrezas, lenguajes, convenciones, actitudes y valores, centrados en las matemáticas y que se transmiten por medio del sistema escolar. La educación matemática en este ámbito se refiere al conocimiento matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje; la finalidad de la educación matemática se centra aquí en enriquecer y estructurar de manera adecuada los diversos significados de los conceptos matemáticos (Rico, 2012, p. 43).

En segundo lugar, la educación matemática como disciplina social que tiene lugar en las escuelas y que es practicada por maestros (profesionales calificados), en este sentido se entiende la educación matemática como las acciones y condiciones que hacen posible la enseñanza de las matemáticas y que abarca el conjunto de conocimientos, procesos y condiciones que hacen posible las interacciones entre profesores y estudiantes en la escuela y que posibilitan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Rico, 2012).

En tercer lugar, la educación matemática como disciplina científica; es en este caso hacemos referencia a la didáctica de la matemática como disciplina académica, que se fundamenta en “marcos teóricos y metodológicos, estructuras conceptuales, análisis históricos y epistemológicos que permiten interpretar, predecir y actuar sobre un campo de fenómenos, en este caso los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (Rico, 2012, p. 45)

Como disciplina, la didáctica de la matemática tiene su campo de estudio en las actividades de significación y tareas sociales de formación de maestros, se ocupa además de indagar metódica y sistemáticamente sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sostener los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos, y proporcionar fundamentación teórica y empírica, es por otro lado un campo académico y científico de investigación y desarrollo que se propone identificar, caracterizar y entender los fenómenos y procesos, en potencia o en acto, implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de cualquier nivel educativo (Niss, 1999)

De acuerdo con Rico (1995), “la didáctica de la matemática trata de conjuntar herramientas de muy diversas procedencias para atender a una tarea social relevante y abordar el núcleo de su competencia: los fenómenos de transmisión, comunicación y construcción del

conocimiento matemático, de los que se derivan los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (p. 553)

Los fenómenos sobre los que trabajan los investigadores en didáctica de la matemática contemplan las relaciones de comunicación, los modos de entender y conocer, los procesos de construcción y los actos de comprensión que se expresan mediante la cantidad, la regularidad, la forma y otras estructuras matemáticas, por esta razón el marco teórico de la didáctica de la matemática se basa en cuatro campos disciplinares: pedagógico, cognitivo, conceptual y sociológico (Rico, 1995)

2.3.4 Los registros de representación semiótica (RRS)

La teoría de los registros de representación semiótica (RRS) fue planteada por: Raymond Duval en el año de 1993, dicha teoría afirma que ningún tipo de proceso matemático puede ser ejecutado sin usar un sistema semiótico de representación que es esencial para la actividad cognitiva del pensamiento.

Por representaciones se entiende dentro del contexto de las matemáticas a las notaciones simbólicas o gráficas y a todas las manifestaciones verbales mediante las cuales se expresan los conceptos y/o procedimientos de esta disciplina, así como las características y propiedades más importantes (Duval, 1995)

Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación según las características que posean, por ejemplo la noción de función puede tener un registro gráfico, uno algebraico o analítico y uno tabular, aunque existan otros, estos son los más usados en la enseñanza hasta el día de hoy (Duval, 1998).

De acuerdo con Duval (1995), dentro de estos registros se pueden llevar a cabo tratamientos que vienen a ser las transformaciones de las representaciones dentro del mismo registro de representación donde fueron creados. “El tratamiento es una acción sobre la representación interna a un registro”(Duval, 1988, p. 59). Es así como dentro de diferentes registros de representación se pueden realizar conversiones que vienen a ser las transformaciones de una representación en otra que pertenece a otro registro diferente al de la primera.

Las representaciones se pueden clasificar en externas e internas. Las externas abarcan todas aquellas representaciones que son susceptibles de ser percibidas por los sentidos, entre tanto las internas vienen a ser las imágenes mentales que el sujeto tiene de los objetos y relaciones que forman parte de su conocimiento(Duval, 1995). “Pero ambos dominios, desde un punto de vista genético, no pueden verse como aislados entre sí, pues las representaciones mentales pueden desarrollarse, únicamente, según un proceso de interiorización de las representaciones externas”(Duval, 1998, p. 157).

(...) es importante señalar que esta distinción no habla acerca de la naturaleza de las representaciones, que a menudo es la misma en ambos casos, sino de la manera de producirlas, del modo en el que son creadas. Las representaciones externas, como los son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, ente otras muchas, son el medio por el que los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás(Duval, 1998, p. 157).

Dependiendo de los símbolos, gráficos o notaciones con los que un estudiante interactúe en su proceso de aprendizaje de un concepto matemático, dará lugar a ciertas determinadas representaciones internas del mismo, así mismo, la manera en que el sujeto utiliza la forma de

representar externamente un concepto servirá para mostrar, cómo es la información o los expresabas sobre dicho concepto.

Duval, (1995) denomina “semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica” (p. 68) y postula que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis, a saber:

- Formación de una representación, identificable como una representación de un registro dado.
- Tratamiento de la representación esto es, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
- Conversión de la representación, es la transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.(Duval, 1995, p. 73)

De acuerdo con Duval (1998) para la actividad matemática es esencial poder movilizar varios registros de representación semiótica, en el transcurso de una misma tarea, independiente del tratamiento, “este recurso es una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con su representaciones y para que sean *reconocidos* en cada una de ella” (p.6).

El aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio apropiado para el análisis de actividades cognitivas relacionadas a la conceptualización. Estas actividades requieren diferenciar un objeto de su representación.

Por otro la Noesis son los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, para Duval no hay Noesis sin semiosis.

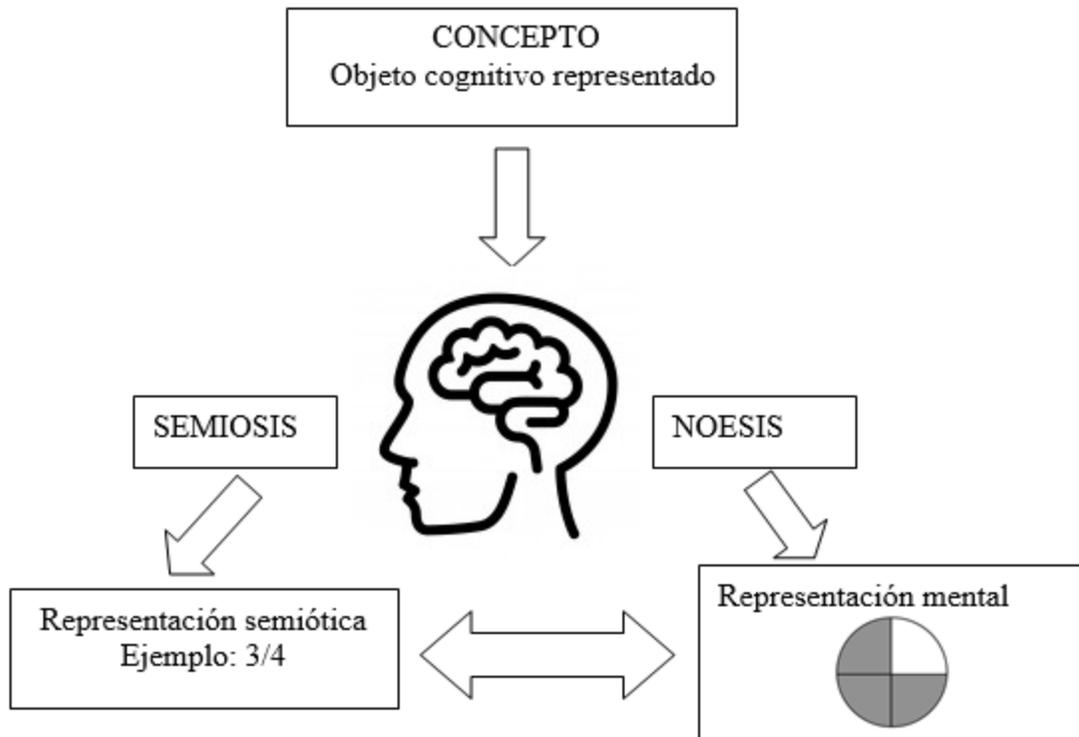


Figura 2. Representación de un sistema semiótico (Semiosis - Noesis)
Fuente: Construcción propia

El manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros no es suficiente para obtener una comprensión integral, es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación, para dicha coordinación, se necesita favorecer el trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación y en la utilización de las posibilidades propias, para que exista correspondencia entre ambas representaciones es decir una especie de traducciones mutuas. (Duval, 1995)

2.4 Marco conceptual

2.4.1 Los números racionales

El concepto de racional, es definido a partir del término razón, esta se interpreta como la división de dos números enteros, para nuestro caso estudiaremos el concepto de razón y en su definición pura de fracción positiva, es decir un subconjunto definido como los números fraccionarios.

En la antigüedad, la unidad geométrica en los griegos era considerada como la magnitud que a medir, en dicho sentido no era única y universal como el número (unidad aritmética), sino que dependía siempre de aquello que se quería medir, es por eso que se disponían de varias medidas de dicha magnitud, o sea la partición de un todo en partes equivalentes más pequeñas.

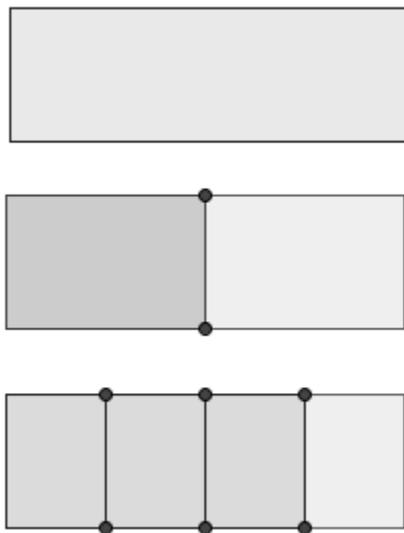


Figura 3. Representación de la unidad en distintas medidas. Concepto de fracción
Fuente: Construcción propia

Dicho de otra manera, para medir una misma magnitud se podía disponer de diferentes unidades según las necesidades de la medición que se fuera a realizar. Así pues, la unidad geométrica era, múltiple y particular. Pero además, dado que la unidad geométrica no era otra

cosa que un elemento particular elegido arbitrariamente de entre todos los elementos que comparten la misma cualidad medible, entonces la naturaleza de dicha unidad era la misma que la de las magnitudes (Obando, 2003)

2.4.1.1 Definición de los números racionales

Los números racionales (\mathbb{Q}), son un conjunto a los que le pertenecen los números fraccionarios y los enteros y además se pueden expresar como $\frac{a}{b}$ con a y $b \in \mathbb{Z}$. Este conjunto se puede ubicar en la recta real, los números racionales no son consecutivos como los naturales pues entre cada par de números racionales existen infinitos números. Todos los números fraccionarios son números racionales, y sirven para representar medidas. Pues a veces es más conveniente expresar un número de esta manera que convertirlo a decimal exacto o periódico, debido a la gran cantidad de decimales que se podrían obtener.

Los números racionales se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, lo que indica que un número racional se escribe por medio de una fracción.

El conjunto de los números racionales se lo denota con la letra \mathbb{Q} , proveniente de la palabra anglosajona “*Quotient*” que quiere decir cociente.

Los números racionales suelen clasificarse dependiendo de la expresión decimal que los acompaña así:

- Racional finito, su representación decimal tiene un número determinado exacto de cifras, ejemplo: $\frac{1}{4}$ son igual a 0,25.
- Racional periódico, son aquellos que poseen un número ilimitado de cifras, que se repiten de forma periódica, estos se clasifican a su vez en periódicos puros, ejemplo:

$$\frac{1}{6} = 0,6666666 \text{ y los periódicos mixtos ejemplo } \frac{5}{7} = 0,714285714285$$

2. 4.1.1.1 Propiedades de los números racionales

Las propiedades son características que están presentes en las operaciones de la suma, la resta, la multiplicación y la división, las propiedades de la suma y la resta son:

- Propiedad clausurativa: la suma de dos números racionales, el resultado siempre será otro número racional. Ejemplo:

$$a/b + c/d = e/f$$

- Propiedad asociativa: al agrupar los diferentes términos de los sumandos, el resultado no cambia. Ejemplo:

$$(a/b + c/d) - e/f = a/b + (c/d - e/f)$$

- Propiedad conmutativa: Al cambiar el orden de los sumandos, el resultado no cambiará. Ejemplo:

$$a/b + c/d = c/d + a/b$$

- Propiedad modulativa (elemento neutro): El cero (0) es el módulo de la suma, al que sí se le suma otro número racional, la respuesta es el mismo número. Ejemplo:

$$(a/b) + 0 = a/b$$

- Inverso aditivo: Existe un número, al que sumarle otro igual, anula la existencia del otro. Es decir que al sumarlos, su resultado es el cero. Ejemplo:

$$a/b - a/b = 0$$

Así mismo, están las propiedades de los números racionales para la multiplicación y la división:

- Propiedad clausurativa: Si se multiplican números racionales, el resultado es un número racional. Ejemplo:

$$a/b * c/d = e/f$$

También aplica para la división. Ejemplo:

$$A/b \div c/d = e/f$$

- Propiedad asociativa: Si se agrupan diferentes factores, dicha agrupación, no altera el producto. Ejemplo:

$$(a/b * c/d) * e/f = a/b * (c/d * e/f)$$

- Propiedad conmutativa: el orden de los factores no altera el producto. Ejemplo:

$$a/b * c/d = c/d * a/b$$

- Propiedad distributiva: al combinar una suma y una multiplicación de números racionales, el resultado será igual a la suma de los factores multiplicado por cada uno de los sumandos. Ejemplo:

$$a/b * (c/d + e/f) = a/b * c/d + a/b * e/f$$

- Propiedad modulativa (elemento neutro): la multiplicación y la división de números racionales, poseen un elemento neutro, cuyo número es uno (1), Ejemplo.

$$a/b * 1 = a/b$$

$$a/b \div 1 = a/b$$

2.4.1.2 Método gráfico para realizar las operaciones básicas con fracciones

Este trabajo tiene como propósito contribuir al aprendizaje de las operaciones básicas con fracciones por medio del método gráfico o también denominado geométrico, este método tiene la particularidad de comportarse como un isomorfismo matemático, puesto que las operaciones básicas se pueden interpretar como una operación dados dos conjuntos. A continuación se muestra los procedimientos necesarios para resolver ejercicios de operaciones con fraccionarios

(suma, resta, multiplicación y división) y en dónde los estudiantes podrán practicar posteriormente poco con el software GeoGebra ya que la aplicación que se propone desde la didáctica tiene dos características muy importantes: La visualización y el dinamismo.

2.4.1.2.1 La suma de fracciones

Dadas dos fracciones (Homogéneas o heterogéneas), se pueden representar por medio de polígonos regulares (En este caso siempre se usarán cuadrados). La primera fracción (A), se puede dibujar como un cuadrado dividido en n partes iguales, por convención las divisiones de la unidad se trazarán con líneas horizontales (Ver polígono rojo). La segunda fracción (B) también es un cuadrado que se puede dividir en n partes iguales, por convención las divisiones de la unidad se trazarán con líneas verticales (Ver polígono azul).

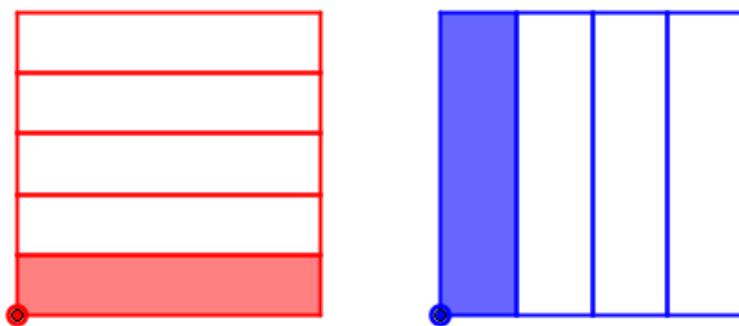


Figura 4. Formas de representación de dos fracciones con el método geométrico
Fuente: Construcción propia

Ahora vamos a realizar la operación de la suma, para ello es necesario sobreponer cualquiera de los cuadrados (propiedad conmutativa), al estar superpuestos las líneas horizontales del cuadrado A (Rojo), se entrecruzan con las líneas verticales del cuadrado B (Azul), formando un polígono nuevo (C), al que lo conforma una rejilla de cuadrados más pequeños todos de igual tamaño (figura 5)

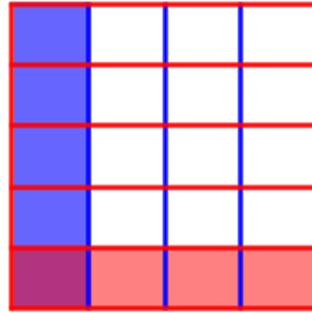


Figura 5. Conformación de la operación suma de fracciones por el método geométrico
Fuente: Construcción propia

Esta superposición de ambos cuadrados es la unión del polígono A, con el polígono B, y recordemos que una unión es la suma todos los elementos. Ahora comprobemos.

Sumemos $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$

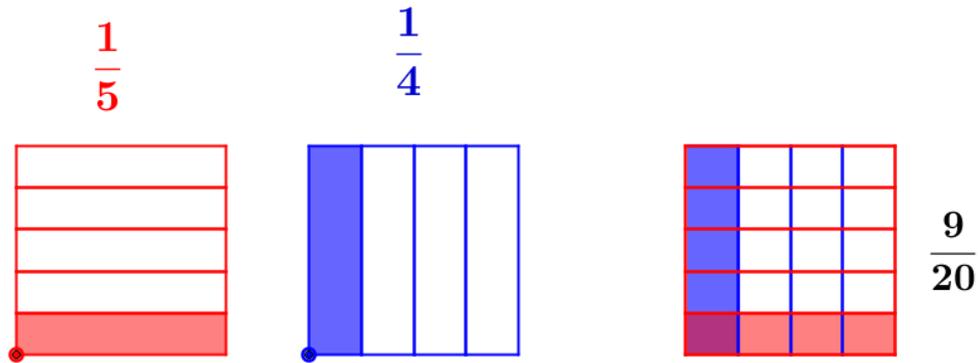


Figura 6. Ejemplo de una suma de fracciones por el método gráfico
Fuente: Construcción propia

Como se puede observar en el último cuadrado se formaron 5 cuadrados azules y 4 cuadrados rojos, $5 + 4 = 9$ que será el numerador; y el denominador equivale al total de cuadrados que conforman el nuevo polígono 20, resultando entonces la fracción $\frac{9}{20}$

Nótese que si se superponen cuadrados estos se deben contar de a uno.

2.4.1.2.2 La resta de fracciones

El procedimiento para la resta de fracciones es el mismo que se hace para la suma. Se tienen los dos polígonos (Rojo y Azul), se superponen, pero hay que dejar claro en la operación de la resta para fracciones positivas (Z^+), se debe cumplir una condición: “El minuendo siempre es mayor que el sustraendo”, para determinar esto bastará con dividir cada una de las fracciones, o sea el numerador entre el denominador. Una forma rápida de hacerlo consiste en multiplicar por 10 el numerador y hacer la división, la fracción mayor tendrá un cociente mayor que la otra.

Miremos en el ejemplo anterior si es posible realizar la resta de las dos fracciones.

$$\text{Restemos } \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$$

Primero debemos comprobar que un quinto sea mayor que un cuarto:

$$\frac{10}{5} = 2 \text{ y } \frac{10}{4} = 2.5$$

Lo anterior afirma que esta resta no se puede realizar en este subconjunto numérico; pero si se puede realizar la operación $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; probémoslo entonces de forma gráfica o geométrica

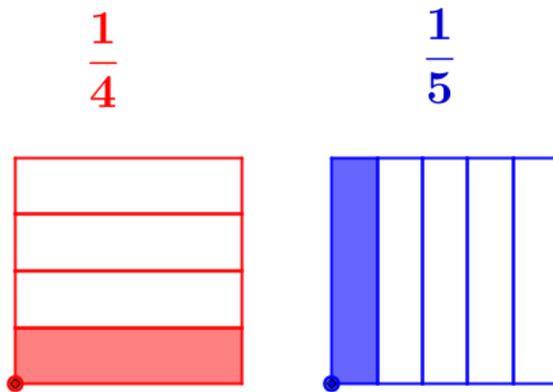


Figura 7. Posición correcta minuendo mayor que sustraendo para la operación de la resta
Fuente: Construcción propia

El procedimiento de la resta es el mismo que para la suma, en este caso superponemos el polígono rojo sobre el azul y aplicamos la operación de diferencia entre conjuntos. En la figura 8 se observa la unión de los dos cuadrados, antes de aplicarle la operación diferencia

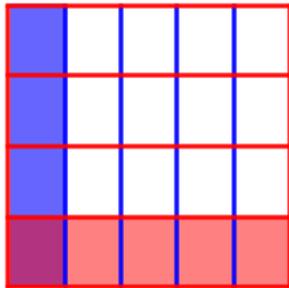


Figura 8. Procedimiento antes de realizar la operación diferencia de fracciones
Fuente: Construcción propia

Ahora con ayuda de un borrador o tapando los cuadrados se procede a retirar un cuadrado rojo por uno azul del polígono resultante tantas veces se repitan de la misma manera, en el momento que ya no existan diferencias, se anotan cuantos cuadrados quedan sin tapar y este será el resultado que llevará el numerador, entre tanto el denominador son el total de cuadrados conformado por la superposición del polígono rojo sobre el azul.

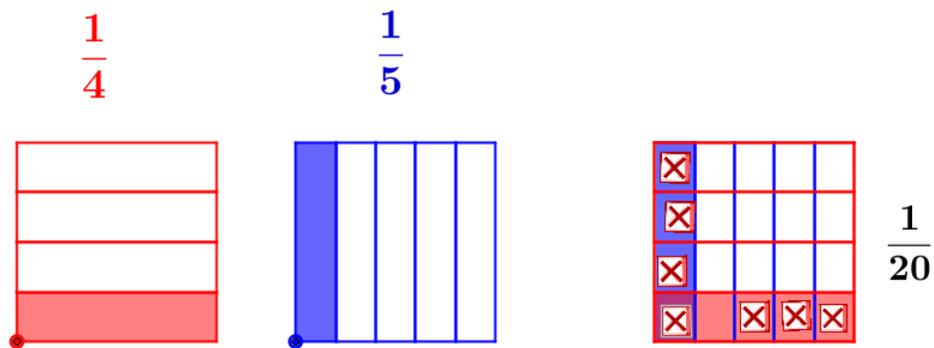


Figura 9. Ejemplo de una resta de fracciones por el método gráfico
Fuente: Construcción propia

Como se puede observar en el último cuadrado se retiraron 4 cuadrados azules y 4 cuadrados rojos del total que eran 9, así sólo quedó un cuadrado rojo que será el numerador; y el

denominador equivale al total de cuadrados que conforman el nuevo polígono 20, resultando entonces la fracción $\frac{1}{20}$

Nótese que si se superponen cuadrados estos se deben quitar igual que una diferencia.

2.4.1.2.3 El producto de fracciones

El procedimiento inicial es idéntico al de la suma, acá no hay problema si se superpone cualquiera de los cuadrados porque en la multiplicación se aplica también la conmutatividad y de la misma forma que la operación de conjuntos el producto es la operación de la intersección, veamos la figura 10.

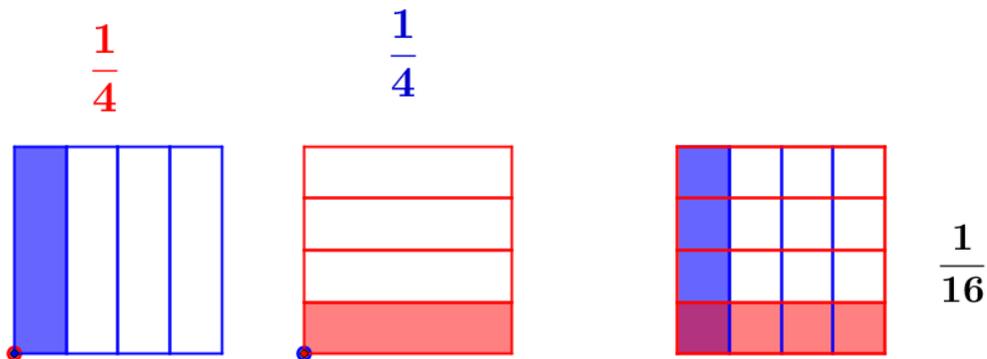


Figura 10. Ejemplo de una multiplicación de fracciones por el método gráfico.
Fuente: Construcción propia

Como se observa el procedimiento es muy simple al ser el producto una intersección, se puede observar que únicamente se intersectan un cuadrado rojo con uno azul, este será el numerador y el denominador lo conforma el total de cuadrados que resultan de superponer tanto el polígono rojo sobre el polígono azul, en la figura 11, se muestra detallado el resultado de la operación.

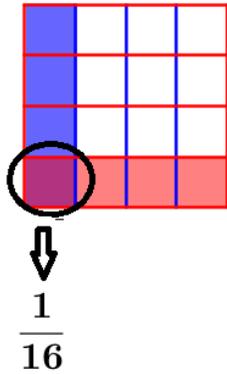


Figura 11. Procedimiento para realizar la multiplicación de una fracción
Fuente: Construcción propia

2.4.1.2.3 La división de fracciones

Es importante recordar que la división de una fracción es el producto cruzado de extremos por medios:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \text{ Los extremos son } a \text{ y } d; \text{ y los medios son } b \text{ y } c$$

$$\text{Luego } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Esta es la manera algebraica cómo funciona la división, ahora observemos como se hace de manera gráfica. El procedimiento es idéntico a todas las anteriores operaciones se deben

superponer los cuadrados el rojo encima del azul, por ejemplo dividamos $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$

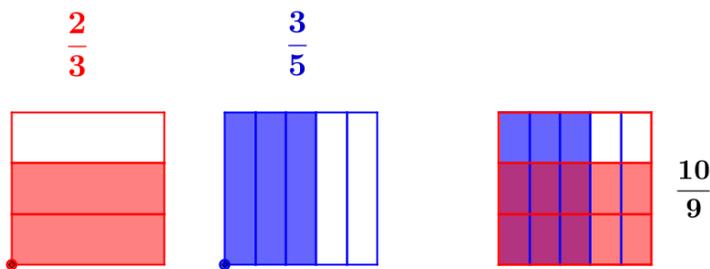


Figura 12. Ejemplo de una multiplicación de fracciones por el método gráfico
Fuente: Construcción propia.

Para este caso se debe ser cuidadoso, ya que la operación es meramente posicional, para conocer el numerador de la fracción contamos los cuadros que se forman horizontalmente (Rojos) y para conocer el denominador contamos los cuadros verticales (Azules). Nótese que no importan ya las rejillas o total de cuadrados formados de la superposición. Observemos el procedimiento en la figura 13

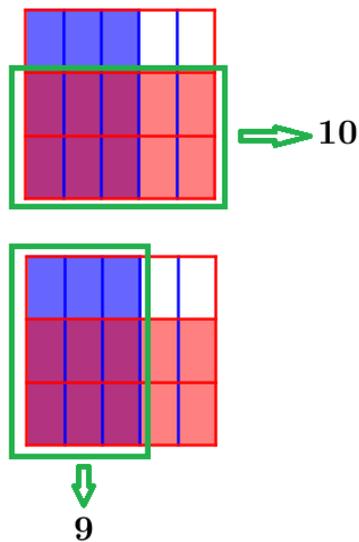


Figura 13. Procedimiento para realizar la división de una fracción
Fuente: Construcción propia.

Cómo se puede observar en la figura 13, lo importante para conocer el resultado es la cantidad de cuadros que se forman tanto horizontales como verticales, sin importar las intersecciones, como se puede ver el resultado de $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{10}{9}$

Capítulo 3

Metodología

3.1 Enfoque de la Investigación

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo, dicho enfoque se caracteriza por que los investigadores pretenden encontrar una situación social como un todo, donde se tienen en cuenta sus propiedades y la dinámica de cómo se configuran dichas situaciones, en su forma más simple este enfoque pretende “conceptuar sobre la realidad, con base en la información obtenida de la población o las personas estudiadas”(Bernal, 2010, p. 60).

Por otro lado este enfoque se orienta a profundizar en casos específicos y no a generalizarlos ya que su preocupación no es la medida estadística, sino la cualificación y descripción del fenómeno social a partir de ciertos rasgos determinantes, según sean percibidos por los elementos mismos que están dentro de la situación estudiada (Bernal, 2010).

3.2 Tipo de Investigación

El tipo de investigación en la que se enmarca el proyecto es la investigación acción en educación, quien de acuerdo con Elliott (1990)“se relaciona con los problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores, en vez de con los problemas teóricos definidos por los investigadores puros en el entorno de una disciplina del saber” (p. 5)

Por otro lado para Lewin (1949) la investigación acción es una práctica reflexiva social en la que no hay distinción entre la práctica sobre la que se investiga y el proceso de investigar sobre ella. Las fases de la investigación acción son cuatro:

- Determinación de la preocupación temática: Que consiste en determinar cuáles son los problemas cotidianos vividos por el maestro y a los cuales les puede dar una solución práctica.
- Reflexión inicial o diagnóstico: Este momento consiste en indagar cuáles son los saberes previos de los estudiantes, qué problemas o conflictos tiene sobre la aprehensión o conocimiento de algún problema o temática escolar.
- La planificación: Es la elaboración del plan para resolver las dificultades encontradas, debe ser flexible, que se adapte o pueda cambiar en su implementación. Debe ser aterrizado, y que se pueda aplicar, contar con los medios disponibles para su ejecución.
- Acción – observación: Es donde a través de la acción y aplicación de la estrategia se registran los datos, es además de observación porque permitirá ser revaluada y susceptible de ser cambiada o mejorada, esta fase vuelve a hacer hincapié sobre la reflexión.(Suárez - Pasos, 2002)

3.3 Método de Investigación

La dificultad acarreada por la pandemia, hizo que un grupo de estudiantes (13) del grupo experimental no pudieran asistir y a la vez acceder al trabajo de aula, se notó por otro lado la deserción, dado que algunos estudiantes (6) fueron ocupados por sus familiares para la recolección del café y ayudar en las tareas domésticas para solventar en cierta parte el sustento económico, esta problemática obligó al docente investigador a implementar un método de investigación alternativo, que pudiera evaluar la propuesta didáctica en un subgrupo de estudiantes (5), y para ello se debió recurrir al estudio de caso.

En Ciencias Sociales, el estudio de caso es una estrategia de investigación que se centra en la comprensión de las dinámicas que se presentan en escenarios particulares (Eisenhardt, 1989). “Cualquier circunstancia, instancia o evento puede constituir un caso, pero difícilmente lo estudiemos a no ser que creamos reviste un interés especial en sí mismo”(Forni, 2010, p. 63). En cualquier estudio de caso hay que prestar atención a cada una de las particularidades y a la vez a la complejidad de un caso particular, único y singular para poder comprender su comportamiento en circunstancias relevantes (Stake, 1998). Generalmente los estudios de caso integran diferentes fuentes y métodos de recolección de datos (archivos, cuestionarios, entrevistas y observaciones). Los datos reunidos pueden ser cuantitativos, cualitativos o ambos.

3.4 Población y Muestra

3.4.1 Población

La población que se tomó en cuenta es la Institución Educativa Técnica Agropecuaria El Guayabo sede principal, del municipio de Fresno; localizado en el departamento del Tolima en las coordenadas geográficas: 5°09'13" latitud Norte y 75°02'13" longitud Oeste.

El municipio de Fresno se encuentra ubicado al Norte del departamento del Tolima(Figura 14), con una extensión aproximada de 208 Km² y una altitud de 1.490 m.s.n.m., limitando al norte con los municipios de Marquetalia y Manzanares del departamento de Caldas, al sur con Falán y Palocabildo, al oriente con Mariquita y al occidente con Casabianca y Herveo.

Referente a los accidentes geográficos el municipio de Fresno se encuentra sobre la parte derecha de la Cordillera Central, lo que define y caracteriza su relieve montañoso y quebrado. Posee dos ríos importantes, que son: el río Gualí y el río Guarinó, los cuales también sirven de límites. El clima predominante es de piso térmico templado, con temperaturas promedio 18°C.

En algunas de las regiones cercanas a los ríos se presenta el piso térmico cálido, con una temperatura promedio de 23°C, y en las partes altas el piso térmico es frío, con temperaturas promedio de 10°C.

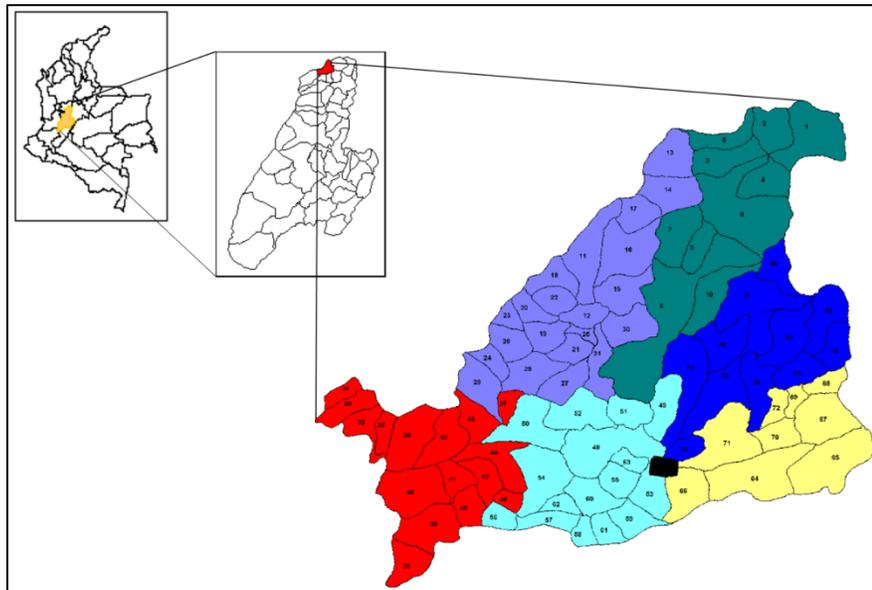


Figura 14. Localización del municipio de Fresno en el departamento del Tolima.

Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/Fresno_\(Tolima\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Fresno_(Tolima))

El municipio de Fresno presenta una población de 31.317 personas aproximadamente, según el Censo de 2005.

Actividades socioeconómicas relevantes

- ***Agricultura.*** Ha sido la base del sustento de la población. Se destaca el cultivo de café, el cual es cultivado mayoritariamente en minifundios o en pequeñas parcelas. A pesar de las dificultades generadas por la roya, la broca, el alto costo de los insumos y de la mano de obra, el pequeño cafetero continúa dedicándose a esta labor, sin ningún tipo de mejora técnica del cultivo. El cultivo de aguacate se ha convertido en un

importante renglón de la economía municipal vinculando gran cantidad de mano de obra, aunque también se encuentra amenazado en su calidad por la deficiencia de sus prácticas y técnicas agrícolas.

Los cultivos transitorios que más se cosechan en la actualidad son: tomate, plátano, yuca, habichuela, fríjol, maíz, hortalizas y caña de azúcar. La explotación maderera se realiza con la técnica tradicional, por el sistema de aserrío. Las principales especies maderables explotadas son: el nogal, el guayacán, el pino, el eucalipto, el cedro y otros. Actualmente se cultivan pastos para la ganadería, que con los pastos naturales sirven de sustento a este renglón, aunque con bajos rendimientos por su deficiencia nutricional.

- **Actividades Pecuarias.** El ganado vacuno ocupa el segundo renglón de la economía local, con perspectivas crecientes debido a las dificultades de la actividad cafetera. Para complementar los ingresos familiares los pequeños agricultores crían animales en forma doméstica como: porcinos, aves, abejas, conejos y equinos. De manera más tecnificada se desarrolla la piscicultura.
- **Comercio.** Es una actividad muy prospera en el municipio y conjuntamente con la agricultura, emplea la mayor parte de la población. Se destaca la comercialización del café y de los productos pan coger. Hay diversidad de locales comerciales que ofrecen variedad de productos nacionales e importados.

Aspectos culturales

- **Grupos humanos.** La población de influencia de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria El Guayabo, se encuentra ubicada en trece veredas del nor- occidente

del municipio de Fresno, al norte del departamento del Tolima. Es una población en cuyo grupo familiar, se encuentra que el 70% es nuclear (conformada por padre, madre e hijos), el 20% monoparental femenino (madre e hijos) y otro 10% monoparental masculino (padre e hijos). En cuanto al número de hijos, el 6% son hijos únicos, el 70% tienen dos o tres y el 24% más de cuatro. El 65% de las familias viven en fincas, el 15% en caseríos rurales y el 20% en la cabecera municipal, observándose que el 63% viven en casa o fincas propias o familiares y el 37% en las fincas donde los padres son los empleados en administración (vivientes o mayordomos); dentro de la población beneficiaria se cuenta con el caserío. El Guayabo, compuesto por población vulnerable y en situación de desplazamiento (aproximadamente 45 familias).

Situación ambiental

La comunidad de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria El Guayabo que comprende 13 veredas del municipio de Fresno- Tolima, se caracteriza por estar habitado por una población de pequeños agricultores y ganaderos, donde en su paisaje se destacan extensiones de pasto y siembras de cultivos de café, plátano, yuca, caña de azúcar, guanábana y aguacate con un ingreso promedio del salario mínimo, pertenecientes al estrato 1 y 2 donde sus necesidades básicas están insatisfechas.(PRAE - Institución Educativa técnica Agropecuaria el Guyabo, 2019)



Figura 15. Vista área de la Institución educativa técnica agropecuaria el Guayabo

Fuente: Google maps. <https://www.google.com/maps/@5.2078212,75.0515148,3750m/data=!3m1!1e3>



Figura 16. Portada principal de la Institución educativa

Fuente: Facebook de la institución educativa

3.4.2 Muestra

El grupo del grado sexto consta de 24 estudiantes, del cual se tomó una muestra de 5 estudiantes, debido a la pandemia no se pudo realizar las hojas de trabajo con todo el grupo, sino con un grupo pequeño de estudiantes, por problemas de conectividad y señal.

3.5 Diseño de la Investigación (Fases de la investigación)

Para este caso en particular se tomaron las cuatro fases de la Investigación acción expuesta por Suárez-Pazos (2002), y a la vez se subdividieron en fases de acción que se exponen en la tabla 1.

Tabla 1.
Fases de la investigación

Fases I-A	Fases de acción	Descripción
Determinación de la preocupación temática	<ul style="list-style-type: none"> • Formulación del problema • Búsqueda del estado de arte 	Se desarrollaron los mecanismos pertinentes para la formulación el problema de acuerdo con la temática de operaciones con fraccionarios debido a la dificultad que los estudiantes presentan para resolver problemas que involucren este tipo de números. Seguidamente se indagó sobre algunas investigaciones respectivas al problema para construir el estado de arte en cuestión
Reflexión inicial o diagnóstico	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación de prueba diagnóstico 	Se diseñó una prueba de entrada sobre operaciones con fracciones para conocer los saberes previos, aplicada a un grupo de estudiantes (18) para encontrar algunas dificultades, errores, concepciones sobre las fracciones.
La planificación	<ul style="list-style-type: none"> • Diseño de los instrumentos de intervención en el aula. • Utilización y manejo de la tecnología 	Con ayuda del software GeoGebra se construyeron 4 aplicativos y cuatro hojas de trabajo mediados con la teoría de los RRS. Los aplicativos de GeoGebra fueron primero mostrados a los estudiantes y se les enseñó como era su manejo

Acción – observación	<ul style="list-style-type: none"> • Recolección de la información. • Procesamiento de la información • Análisis y conclusiones 	Después de ser aplicados cada uno de los instrumentos se pasa a la recolección, organización, clasificación y análisis de los datos. Posteriormente se construyen las conclusiones y las recomendaciones.
----------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fuente: Construcción propia

3.6 Instrumentos

Los instrumentos diseñados para la recolección de datos fueron diseñados respondiendo a cada una de las fases de la investigación, por ello se recurrieron a varios tipos. En primer lugar se utilizó el cuestionario o test, posteriormente se utilizaron las hojas de trabajo con GeoGebra y finalmente se aplicó un instrumento que sirviera para la evaluación del instrumento de intervención, en este caso el aplicativo GeoGebra, a continuación se describen cada uno de los instrumentos.

3.6.1 Cuestionario de conocimientos

Se diseñó una prueba que sirvió como pre – test (Anexo A) y cuyo objetivo era conocer el estado inicial de los conocimientos sobre las operaciones básicas con fracciones de los estudiantes, posterior a la intervención con las hojas de trabajo de GeoGebra se volvió a aplicar el mismo cuestionario (pos – test) para poder analizar y determinar si la intervención didáctica ayudó a los estudiantes en la conceptualización y aprendizaje de las cuatro operaciones básicas con fraccionarios. El cuestionario estaba compuesto por 8 ítems, clasificados en 6 categorías así: Noción de fracción (pregunta 2), suma (pregunta 1), resta (pregunta 8), multiplicación (pregunta 3), división (pregunta 4) y resolución de problemas (preguntas 5, 6, 7).

3.6.2 Las hojas de trabajo con GeoGebra

Posterior a la aplicación del pre – test, los estudiantes desarrollaron las cuatro hojas de trabajo con GeoGebra (Anexo B, C, D, E) el objetivo primordial era que los estudiantes con la ayuda del software y las hojas de trabajo mediadas con los RRS, desarrollaran habilidades desde diferentes registros para la resolución de problemas que involucraran las cuatros operaciones básicas con los fraccionarios. Cada hoja de trabajo estaba compuesta por seis apartados así: 1) Declaración de competencias, en dónde se describía la competencia que se deseaba al desarrollar la hoja de trabajo. 2) Secuencia metodológica, que servía para hacer una descripción de los momentos que debía desarrollar el estudiante durante el proceso de interacción tanto con la hoja de trabajo como con la aplicación de GeoGebra. 3) Diagnóstico para conocer los saberes previos de los estudiantes. 4) Motivación, en dónde se invitaba a los estudiantes al conocimiento y se les mostraba algunos conceptos fundamentales para el siguiente momento. 5) Desarrollo de la hoja de trabajo en donde se les mostraba cómo trabajar con la aplicación y respondía a una serie de preguntas sobre los conceptos enseñados, para finalmente, 6) La Aplicación en dónde se invitaba al estudiante a resolver un problema aplicando lo aprendido durante el desarrollo y la interactividad con la hoja de trabajo y el uso de GeoGebra

3.6.3 Los aplicativos diseñados con GeoGebra

Se diseñaron cuatro aplicativos con el software libre GeoGebra, que concordaran con las cuatro hojas de trabajo enunciadas anteriormente, en la figura 17 se muestran los cuatro aplicativos.

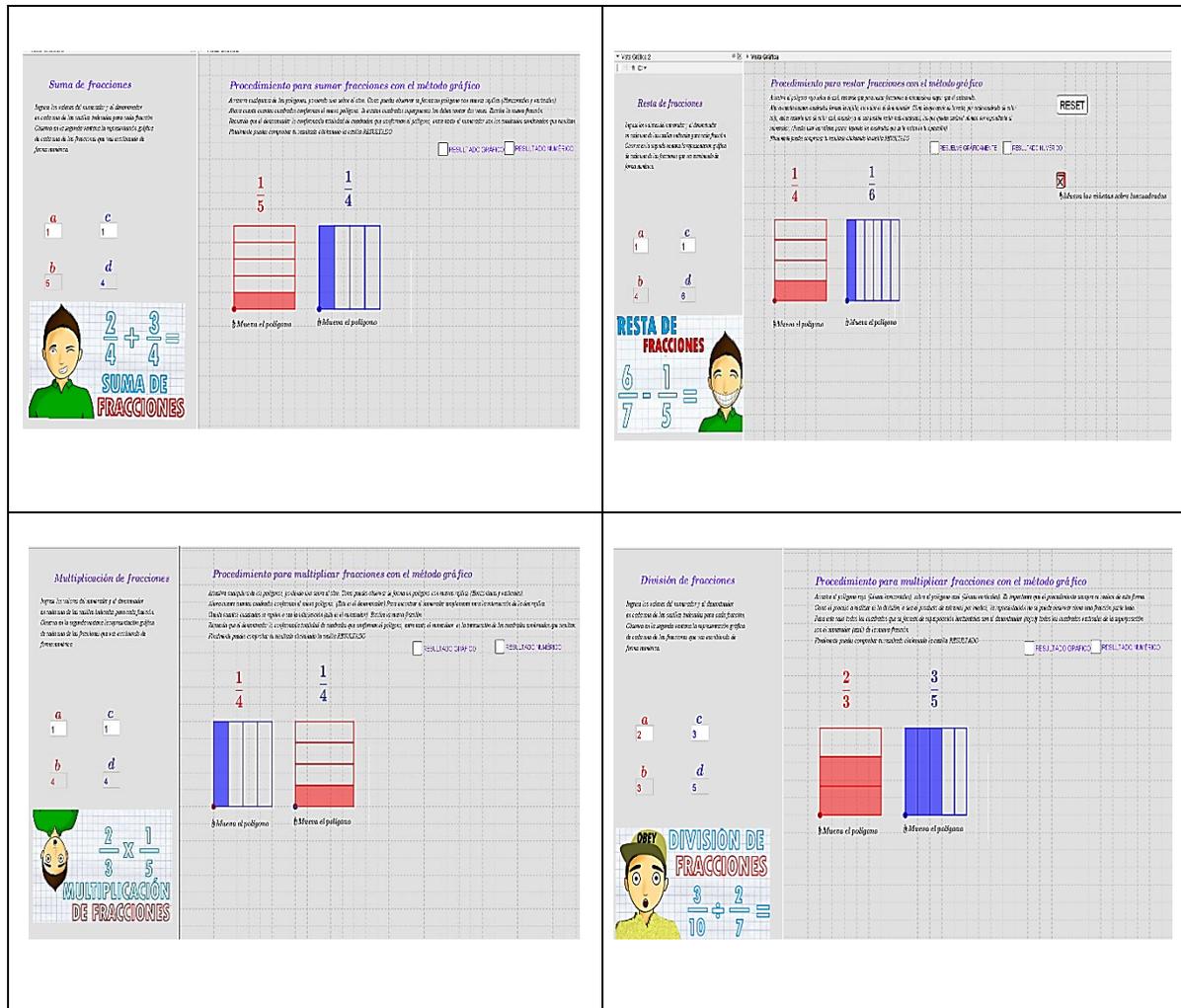


Figura 17. Pantalla inicial de cada uno de los aplicativos diseñados para el proyecto

Fuente: Construcción propia

3.6.4 Encuesta sobre la aplicabilidad del instrumento mediado con TIC

Se desarrolló un instrumento para valorar el uso de los aplicativos con el software

GeoGebra de acuerdo con la metodología CodA, para verificar si el instrumento era fácil de usar, tenía un entorno agradable, y si cumplía con los requerimientos pedagógicos y didácticos para el aprendizaje. (Anexo F)

3.7 Prueba de validez de los instrumentos

La validez de los instrumentos es primordial en la investigación (Anexo G), pues con ella se valora la confiabilidad del instrumento, eso quiere decir que el instrumento si va a medir lo

que se propone sin presentar sesgos. Para esta investigación se recurrió a un instrumento propuesto por Escobar-Pérez & Cuervo-Martínez(2008), en la tabla 2 se relacionan las categorías, la calificación y los indicadores.

Tabla 2.
Rúbrica para evaluación de los instrumentos

CATEGORÍA	CALIFICACIÓN	INDICADOR
SUFICIENCIA Los ítems que pertenecen a una misma dimensión bastan para obtener la medición de ésta.	1. No cumple con el criterio	Los ítems no son suficientes para medir la dimensión
	2. Bajo nivel	Los ítems miden algún aspecto de la dimensión pero no corresponden con la dimensión total
	3. Moderado nivel	Se deben incrementar algunos ítems para poder evaluar la dimensión completamente.
	4. Alto nivel	Los ítems son suficientes
CLARIDAD El ítem se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.	1. No cumple con el criterio	Los ítems no son claros
	2. Bajo nivel	Los ítems requieren bastantes modificaciones o una modificación muy grande en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de las mismas
	3. Moderado nivel	Se requiere una modificación muy específica de algunos de los términos del o los ítems
	4. Alto nivel	Los ítems son claros, tienen semántica y sintaxis adecuada
COHERENCIA El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo.	1. No cumple con el criterio	Los ítems no tiene relación lógica con la dimensión
	2. Bajo nivel	Los ítems tienen una relación tangencial con la dimensión.
	3. Moderado nivel	Los ítems tienen una relación moderada con la dimensión que está midiendo.
	4. Alto nivel	Los ítems se encuentran completamente relacionados con la dimensión que se está midiendo.
RELEVANCIA El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo.	1. No cumple con el criterio	Los ítems pueden ser eliminados sin que se vea afectada la medición de la dimensión.
	2. Bajo nivel	Los ítems tienen alguna relevancia, pero otro ítem puede estar incluyendo lo mismo que mide éste.
	3. Moderado nivel	Los ítems son relativamente importantes
	4. Alto nivel	Los ítems son muy relevantes y deben ser incluidos todos en el cuestionario.

Fuente: (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008)

Cualquier instrumento para la recolección de datos de una investigación debe resumir dos requisitos esenciales: validez y confiabilidad. Con la validez se comprueba la revisión de la presentación del contenido, la relación de los indicadores con los ítems (preguntas) que miden las variables correspondientes.

De acuerdo con Herrera (1998) el grado de validez de un instrumento se resume en la siguiente tabla:

Tabla 3.

Valores para el grado de validez del instrumento

0 a 53%	Validez nula
54% a 59%	Validez baja
60% a 65%	Válida
66% a 71%	Muy válida
72% a 99%	Excelente validez
100%	Validez perfecta

Fuente: (Herrera, 1998)

Capítulo 4.

Resultados de la Investigación

4.1 Prueba de validez de los resultados de los instrumentos

El cuestionario (prueba diagnóstico y final), así como las hojas de trabajo de GeoGebra fueron validadas por tres expertos dentro del área de la didáctica de las matemáticas. Ellos fueron:

- Mg. Luis Hernando Carmona Ramírez. Magister en didáctica de las matemáticas; especialista en didáctica de las ciencias: matemáticas y física.
- Mg. Mauricio Motoa Grajales. Magister en didáctica de las matemáticas.
- Lic. Paulo Rodríguez. Licenciado en matemáticas

La validez de los instrumentos es primordial en la investigación, pues con ella se valora su confiabilidad. Para esta investigación se recurrió al instrumento propuesto por Escobar-Pérez & Cuervo-Martínez(2008)), relacionado en la tabla 2; después de sistematizar los resultados de los tres expertos y hacer un promedio el resultado obtenido fue del 93%, que de acuerdo con Herrera(1998) expuesto en la tabla 3, se caracteriza por tener una excelente validez pues se encuentra en el rango del 79% a 99%.

4.2 Resultados de la prueba diagnóstico versus prueba final sobre conceptos de fraccionarios y sus operaciones.

La prueba diagnóstica y la prueba final (pre y pos – test) que se le aplicó al grupo de estudiantes fue exactamente la misma prueba, constaba de 8 ítems con única respuesta de

selección múltiple (Se adicionó el ítem No sé, en las respuestas con el propósito de conocer si los estudiantes no tenían conocimiento acerca de cada una de las preguntas), al final se les pidió que explicaran el cómo habían llegado a cada una de sus respuestas.

La escala de evaluación aplicada fue de tipo dicotómica: Correcta (1); Incorrecta (0)

En la figura 18 se muestran los resultados obtenidos de las respuestas correctas medidas en porcentajes.

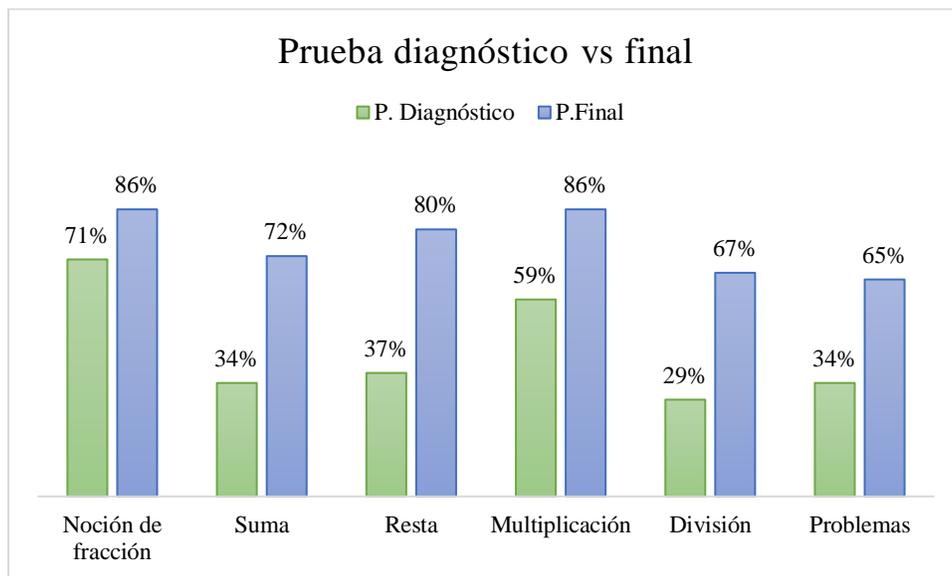


Figura 18. Resultados obtenidos de prueba diagnóstica versus prueba final
Fuente: Construcción propia

Los resultados muestran que luego de la intervención con la estrategia didáctica se obtuvieron unos resultados significativos del pre – test con respecto al pos – test, se nota un crecimiento porcentual considerable en todos los aspectos que se tuvieron en cuenta en cuanto a las operaciones con fracciones para estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa Técnica y Agropecuaria El Guayabo de Fresno Tolima.

En las nociones de fracciones el incremento fue de un 15%, teniendo en cuenta que en el diagnóstico inicial se había tenido un acierto del 71%. La suma de fracciones aumentó un 38%

teniendo en cuenta que se partió de un 34%. La resta de fracciones aumentó un 43% partiendo de un acierto inicial de 37%. La multiplicación de fraccionarios aumento un 28% partiendo de un 59% de aciertos en la prueba inicial. La división de fracciones aumento un 38% a partir de un 29% de aciertos en la prueba diagnóstica. Finalmente la resolución de problemas con fracciones aumentó un 31% a partir de un 34% en la prueba de diagnóstico.

Los resultados obtenidos son semejantes a lo planteado por García-López (2011) donde argumenta que el trabajo con GeoGebra contribuye al desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, siendo su influencia más notoria en unas competencias que en otras. Destaca el potencial de este software para el desarrollo de las competencias Representar y Uso de Herramientas y Recursos, y el promover una evolución considerable en los estudiantes, de manera homogénea.

4.3 Análisis de los resultados obtenidos con las hojas de trabajo de GeoGebra

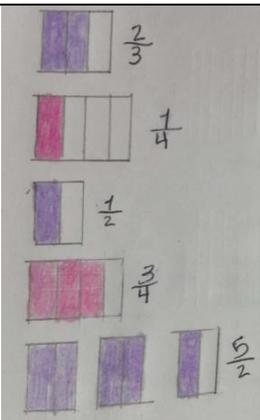
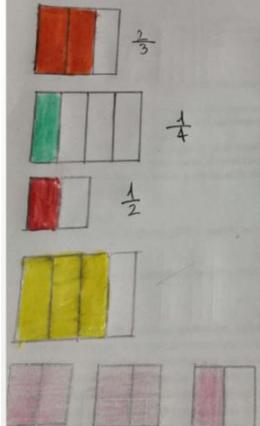
A continuación se muestran los hallazgos más significativos de manera descriptiva de las hojas de trabajo desarrolladas por los 5 estudiantes que se van a denominar de la siguiente manera: Est 1, Est 2, Est 3, Est 4 y Est 5. Para hacer el análisis cualitativo solo se tuvo en cuenta el apartado de la hoja denominado ***Aplicación:*** que se relaciona con la resolución de problemas. Además es importante aclarar que el objetivo específico 3 enunciado en el capítulo 1 de este trabajo hace alusión a la *descripción de los resultados y las dificultades que producen el uso del software GeoGebra y los RRS en el aprendizaje de las operaciones básicas con fracciones.*

4.3.1 Análisis de la hoja de trabajo 1: Suma

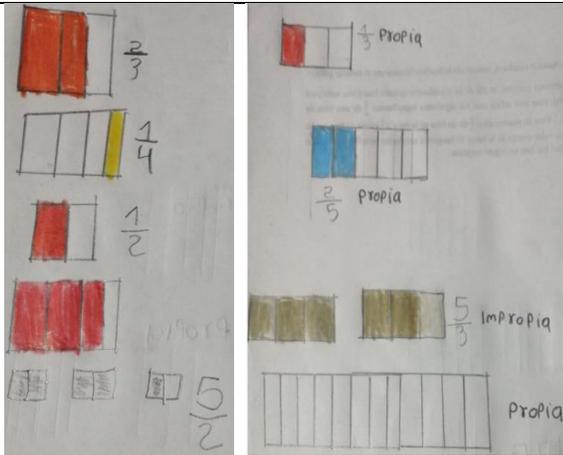
El problema planteado para que los estudiantes lo resolvieran por medio del método gráfico fue el siguiente: *Te propongo la siguiente situación cotidiana, resuélvelo utilizando únicamente el*

método gráfico. María y Mario son dos hermanos gemelos, el día de su cumpleaños quieren hacer una torta para celebrar tan maravilloso día, para ello deben usar los siguientes ingredientes: $\frac{2}{3}$ de una libra de harina; $\frac{1}{4}$ de taza de azúcar; $\frac{1}{2}$ libra de mantequilla; $\frac{3}{4}$ de un litro de leche y $2\frac{1}{2}$ claras de huevos. Su madre les pide el resultado de la suma de las partes necesarias para fabricar la torta y en premio a su laboriosidad les dará un regalo sorpresa. En la tabla 4 se relacionan cada uno de los resultados de los cinco estudiantes.

Tabla 4.
Resultados de las hojas de trabajo 1: Suma

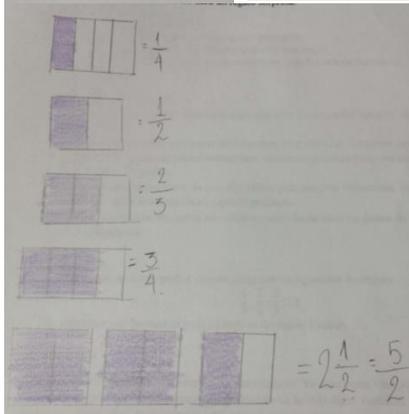
Estudiante	Registro
<p data-bbox="227 945 292 987">Est 1</p> 	<p data-bbox="641 766 1404 955">Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, igual que su representación numérica. Dada la complejidad del problema convierte fácilmente la representación numérica de un número mixto $2\frac{1}{2}$ a una fracción impropia $\frac{5}{2}$. Pero no resuelve el problema que se le plantea.</p>
<p data-bbox="227 1386 292 1428">Est 2</p> 	<p data-bbox="641 1228 1404 1417">Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, y solo algunas representaciones numéricas. Dada la complejidad del problema convierte fácilmente la representación numérica de un número mixto $2\frac{1}{2}$ a una fracción impropia $\frac{5}{2}$ pero sólo de forma pictórica, no resuelve el problema que se le plantea.</p>

Est 3



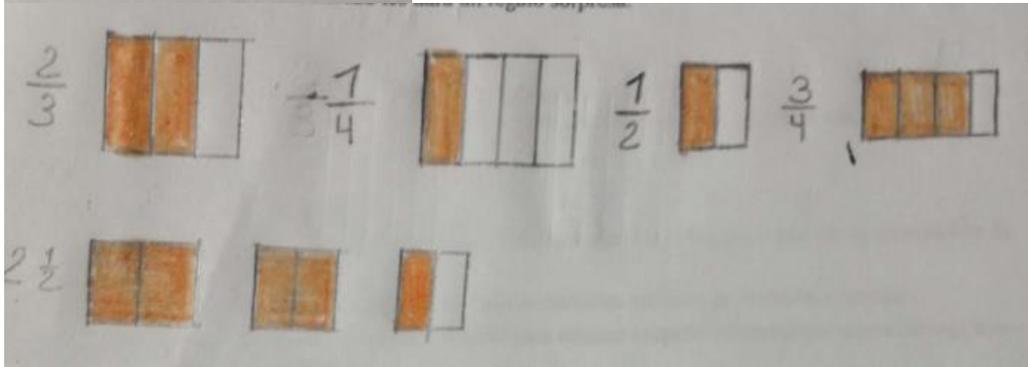
Realiza de forma correcta las representaciones pictórica y numérica de las fracciones, expresa de forma correcta usando tanto la representación pictórica como la numérica una fracción impropia. Realiza un bosquejo para resolver el problema, sin llegar a la solución correcta.

Est 4



Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, igual que su representación numérica. Dada la complejidad del problema convierte fácilmente la representación numérica de un número mixto $2\frac{1}{2}$ a una fracción impropia $\frac{5}{2}$. Pero no resuelve el problema que se le plantea.

Est 5



Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, igual que su representación numérica. Dada la complejidad del problema convierte fácilmente la representación numérica de un número mixto $2\frac{1}{2}$ a una fracción impropia $\frac{5}{2}$. No llega a una solución correcta del problema.

Fuente: Construcción propia

Hallazgos: En el desarrollo de la hoja de trabajo se nota cómo los estudiantes resuelven ejercicios sobre la suma de fracciones con el método gráfico de una forma sencilla pero solo cuando las fracciones son propias (ver figura 19), el nivel de complejidad para resolver

situaciones problemas que requieren la interpretación y uso de métodos más avanzados dónde es necesario usar unas habilidades de orden superior se tornan más difíciles de resolver dada su complejidad.

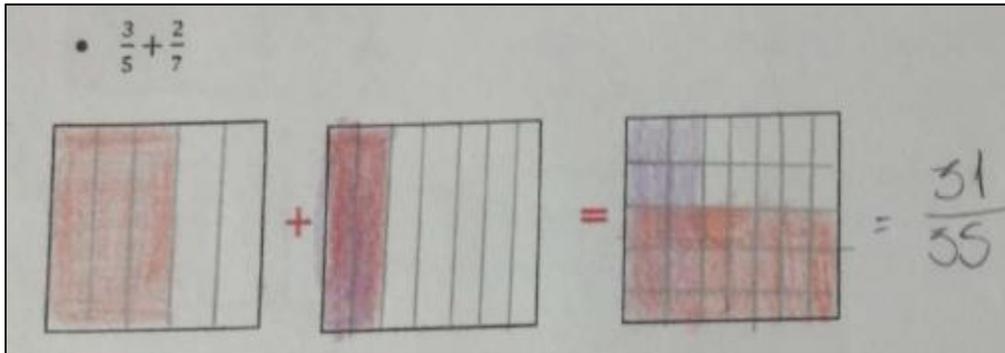


Figura 19. Resultado de la operación suma de fracciones del Est 4.
Fuente: Hoja de trabajo desarrollada por el estudiante 4

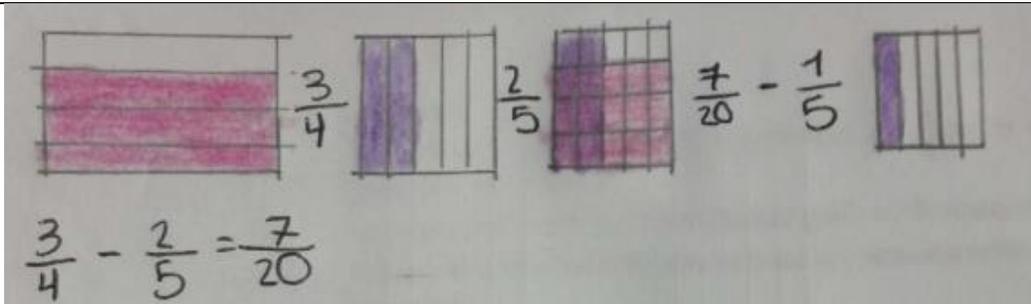
Además el uso del software les permite las visualizaciones y hacer más sencillo la comprensión del problema, aunque no se puede caer en su uso, ya que los estudiantes solo se remitirían a ingresar los datos para esperar los resultados sin ningún esfuerzo (Castaño-Arbeláez y García-Castro, 2014).

De acuerdo con León (2011) existen errores sobre la comprensión de las fracciones que dificultan tanto la enseñanza como el aprendizaje, estas dificultades pueden ser: la no comprensión de la fracción como parte de un todo, la falsa representación gráfica empleando partes más grandes que otras y haciéndolas ver como si fuesen iguales. En cuanto a la adición una de las mayores dificultades radica en cuanto que al resolver la operación de forma numérica hacen la suma de forma directa es decir suman numeradores entre sí y denominadores entre sí, tal como si fuesen números naturales, esto se evidenció en algunos resultados de la prueba diagnóstica.

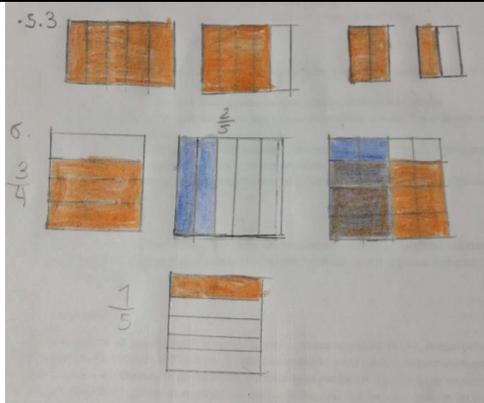
4.3.2 Análisis de la hoja de trabajo 2: Resta

El problema planteado para que los estudiantes lo resolvieran por medio del método gráfico fue el siguiente: *Hoy fui al mercado y pedí $\frac{3}{4}$ de una paca de panela, mi interés era repartirlo a varias personas afectadas por la pandemia. Visite a una familia cercana y les di $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{4}$ que había comprado inicialmente, luego pasé donde doña Julia y les entregué $\frac{1}{5}$ de lo que me quedaba. ¿Cuánto me quedó de panela para llevar a mi casa? Resuelve el problema mediante el método gráfico.* En la tabla 5 se relacionan cada uno de los resultados de los cinco estudiantes.

Tabla 5.
Resultados de las hojas de trabajo 2: Resta

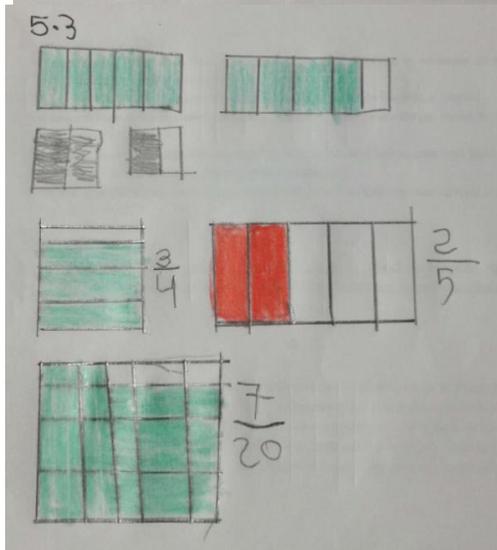
Estudiante	Registro
Est 1	 <p>Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, igual que su representación numérica. Igualmente resuelve la primera parte del problema, dado que es una fracción propia, no realiza en su totalidad la situación planteada.</p>
Est 2	 <p>Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, y algunas representaciones numéricas. Intenta resolver el problema sin éxito.</p>

Est 3



Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, y algunas representaciones numéricas. Intenta resolver el problema pero no da su resultado de manera numérica.

Est 4



Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, y algunas representaciones numéricas. Sólo resuelve la primera parte del problema.

Est 5 No asistió a la clase.

Fuente: Construcción propia

Hallazgos: A diferencia de la suma la resta tiene una forma interesante de ser tratada con el método gráfico pues el estudiante debe entender que la operación hace referencia a una diferencia, es decir debe ir eliminando cuadrados uno a uno y llegar al momento en que no es posible seguir sustrayendo cuadrados de las rejillas uno a uno. En la figura 20, se ilustra la forma como el estudiante 1 emplea rayas para ir eliminando los cuadrados repetidos en cada polígono.

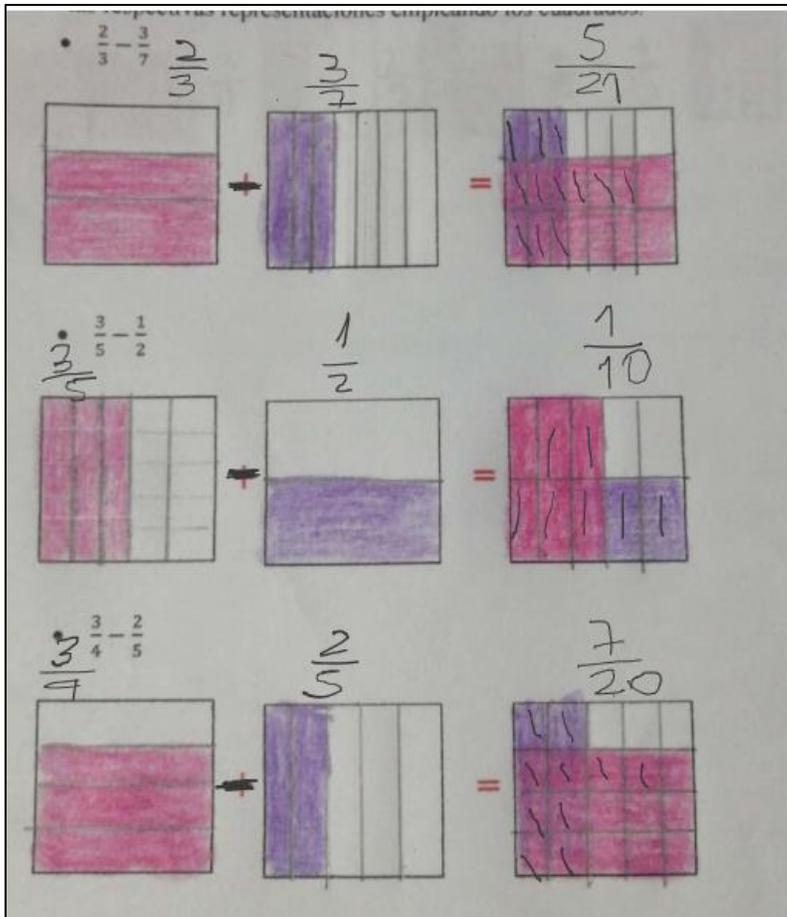


Figura 20. Procedimientos realizados por el estudiante 1 para operar con la resta de fracciones
Fuente: Hoja de trabajo desarrollada por el estudiante 1

En general se vuelve a notar la falta de comprensión de los problemas y su resolución, si bien hacen representaciones pictóricas, se vuelve a presentar la falsa representación gráfica ya que emplean partes más grandes que otras haciéndolas ver como si fuesen iguales (León, 2011), si bien es un problema común en casi todos los escolares del país, esto bien puede obedecer a errores que no son corregidos por los maestros en el momento de enseñarlos.

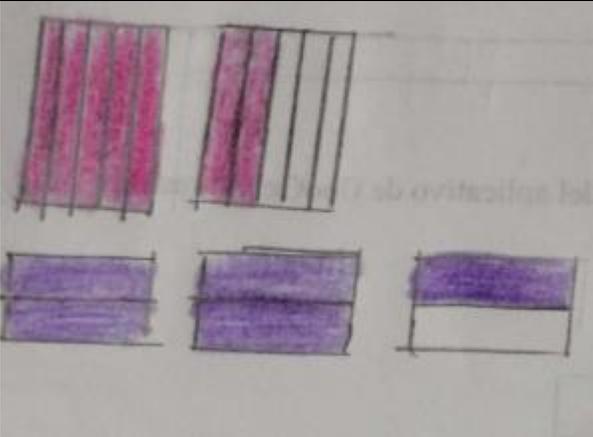
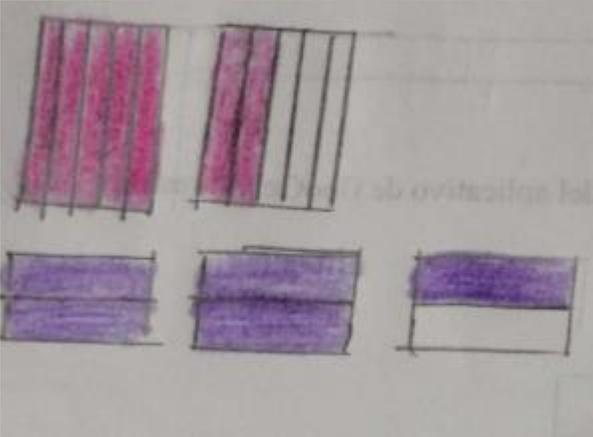
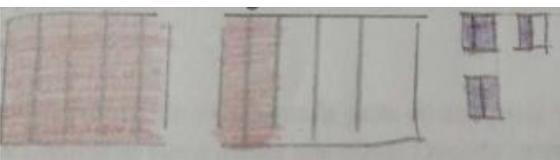
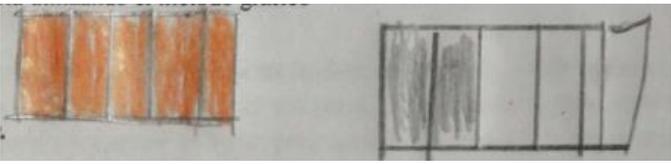
4.3.3 Análisis de la hoja de trabajo 3: Multiplicación

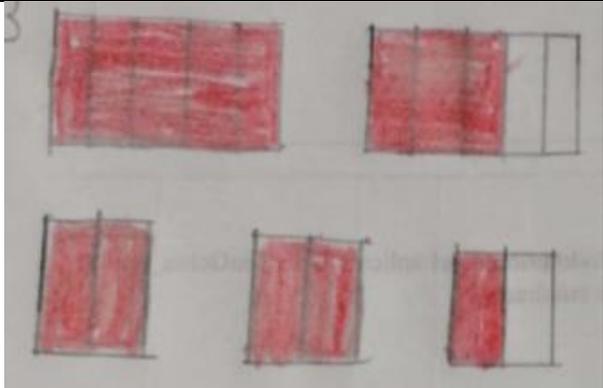
El problema planteado para que los estudiantes lo resolvieran por medio del método gráfico fue el siguiente: *Ahora te propongo que resuelvas el siguiente producto de fracciones*

impropias, explica cómo lo resolvería utilizando el método gráfico

$\frac{7}{5} \times \frac{5}{2}$ En la tabla 6 se relacionan cada uno de los resultados de los cinco estudiantes.

Tabla 6.
Resultados de las hojas de trabajo 3: Multiplicación

Estudiante	Registro
Est 1	 <p data-bbox="997 520 1406 751">Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, y ninguna representación numérica. No intentan resolver el problema dado la complejidad que se exige ya que es una multiplicación de fracciones impropias.</p>
Est 2	 <p data-bbox="997 961 1406 1192">Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, y ninguna representación numérica. No intentan resolver el problema dado la complejidad que se exige ya que es una multiplicación de fracciones impropias.</p>
Est 3	 <p data-bbox="378 1566 883 1600">una multiplicación de fracciones impropias</p> <p data-bbox="961 1402 1406 1562">Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, y ninguna representación numérica. No intentan resolver el problema dado la complejidad que se exige ya que es</p>
Est 4	 <p data-bbox="1071 1633 1370 1768">Realiza una sola representación pictórica cometiendo el error de la falsa representación.</p>

Est 5		Realiza las representaciones pictóricas de manera correcta, y ninguna representación numérica. No intentan resolver el problema dado la complejidad que se exige ya que es una multiplicación de fracciones impropias
-------	-----------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fuente: Construcción propia

Hallazgos: El uso de la aplicación de GeoGebra durante el aprendizaje de la multiplicación de fracciones ayudó al entendimiento del concepto de la operación producto como la intersección de dos conjuntos, si bien durante el proceso se notó que los estudiantes entendieron de manera correcta dicho proceso y en la etapa de socialización respondieron correctamente los resultados obtenidos, en el desarrollo de la guía realizaron todos sin excepción sólo hicieron las representaciones pictóricas como se observa en la figura 21. De esto se podría inferir que creen que por el hecho de resolver la parte gráfica por ende este es el resultado, pero dicha acción va más allá de esta percepción ya que cuando se usa el software todas las respuestas que este lanza desde la parte gráfica son parecidas, lo que hace indispensable que los estudiantes usen también la representación numérica. Así mismo se nota en el apartado aplicación, dónde todos representan muy bien las fracciones con pictogramas, olvidando o dejando a un lado la representación numérica que también la pueden encontrar dentro de la aplicación.

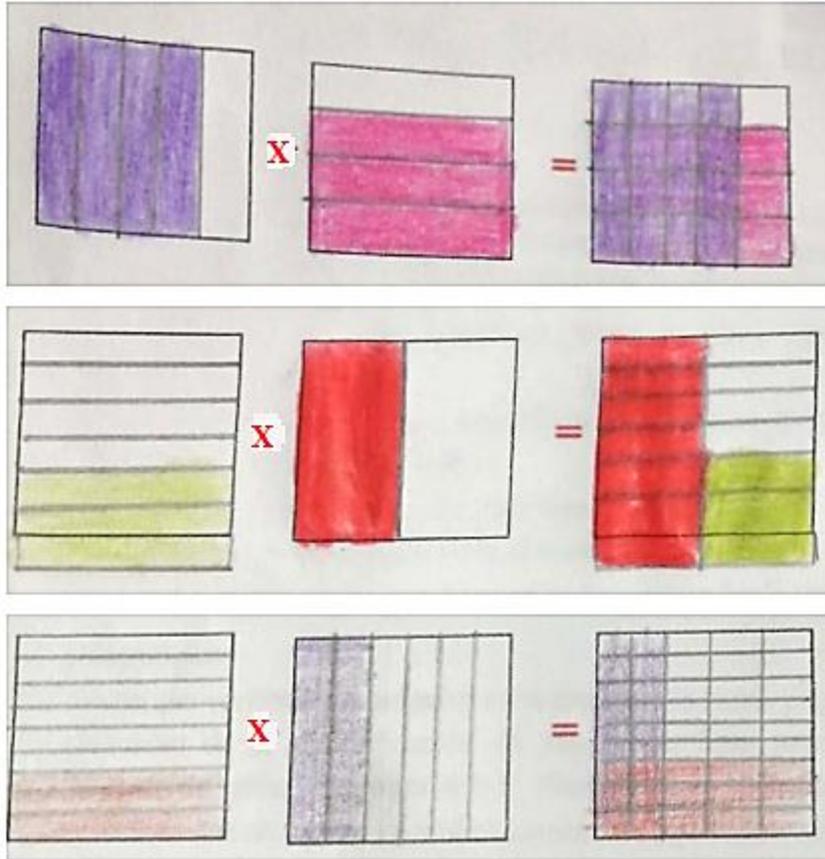


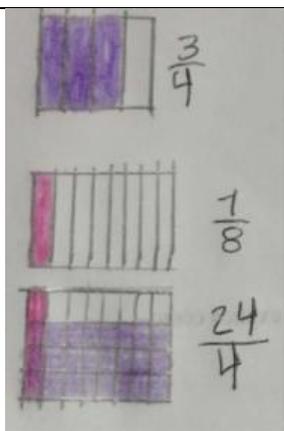
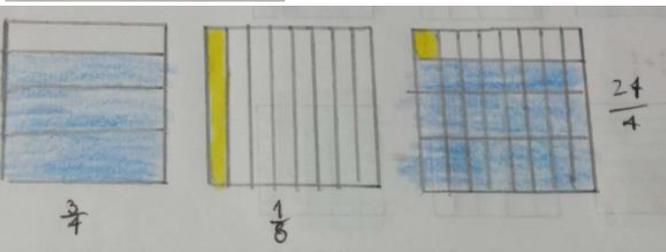
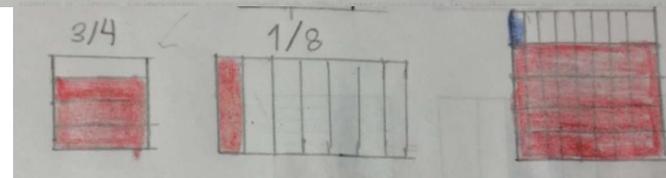
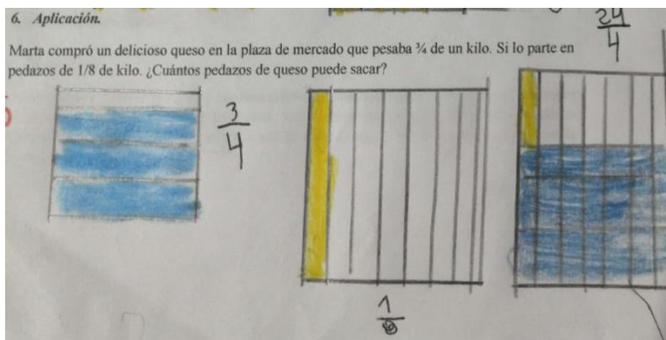
Figura 21. Resultados pictóricos obtenidos por los estudiantes de la operación producto de fracciones.
Fuente: Hoja de trabajo desarrollada por el estudiante 2, 3 y 5

4.3.4 Análisis de la hoja de trabajo 4: División

El problema planteado para que los estudiantes lo resolvieran por medio del método gráfico fue el siguiente: *Marta compró un delicioso queso en la plaza de mercado que pesaba $\frac{3}{4}$ de un kilo. Si lo parte en pedazos de $\frac{1}{8}$ de kilo. ¿Cuántos pedazos de queso puede sacar?*

En la tabla 7 se relacionan cada uno de los resultados de los cinco estudiantes

Tabla 7.
Resultados de las hojas de trabajo 4: División

Estudiante	Registro
Est 1	 <p>Realiza de manera correcta la representación pictórica y gráfica, igualmente resuelve el problema.</p>
Est 2	 <p>Realiza de manera correcta la representación pictórica y gráfica, igualmente resuelve el problema.</p>
Est 3	 <p>Realiza de manera correcta la representación pictórica y gráfica, igualmente resuelve el problema.</p>
Est 4	<p>No la realizó</p>
Est 5	 <p>Realiza de manera correcta la representación pictórica y gráfica, igualmente resuelve el problema.</p>

Fuente: Construcción propia

Hallazgos: Llama poderosamente la atención con el desarrollo de la hoja de trabajo referente a la división pues de acuerdo con la propuesta didáctica era la de mayor complejidad

para interpretar los resultados, pero en el desarrollo y socialización de las respuestas fue la que obtuvo el mejor desempeño por parte de todos los estudiantes ya que todos emplearon tanto la representación gráfica como numérica a la hora de realizar la tarea de la aplicación, así mismo como el desarrollo de toda la hoja de trabajo

4.4 Resultados del uso del aplicativo diseñado con GeoGebra

Para valorar el aplicativo diseñado con GeoGebra se empleó un modelo de rúbrica llamado CodA (Anexo F). La herramienta COdA fue desarrollada en el marco de los Proyectos de Innovación y Mejora de la Calidad de la Docencia de la Universidad Complutense de Madrid(Fernández-Pampillón et al., 2011).

Para la valoración los aplicativos de GeoGebra, se empleó la rúbrica que se muestra en la tabla 5, de acuerdo con una escala de valoración tipo Likert así:

- 5 = Totalmente de acuerdo
- 4 = De acuerdo
- 3 = Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- 2 = En desacuerdo
- 1 = Totalmente en desacuerdo.

En la figura 18 se muestran los resultados obtenidos posterior a la realización de la encuesta aplicada al grupo de estudiantes seleccionados.

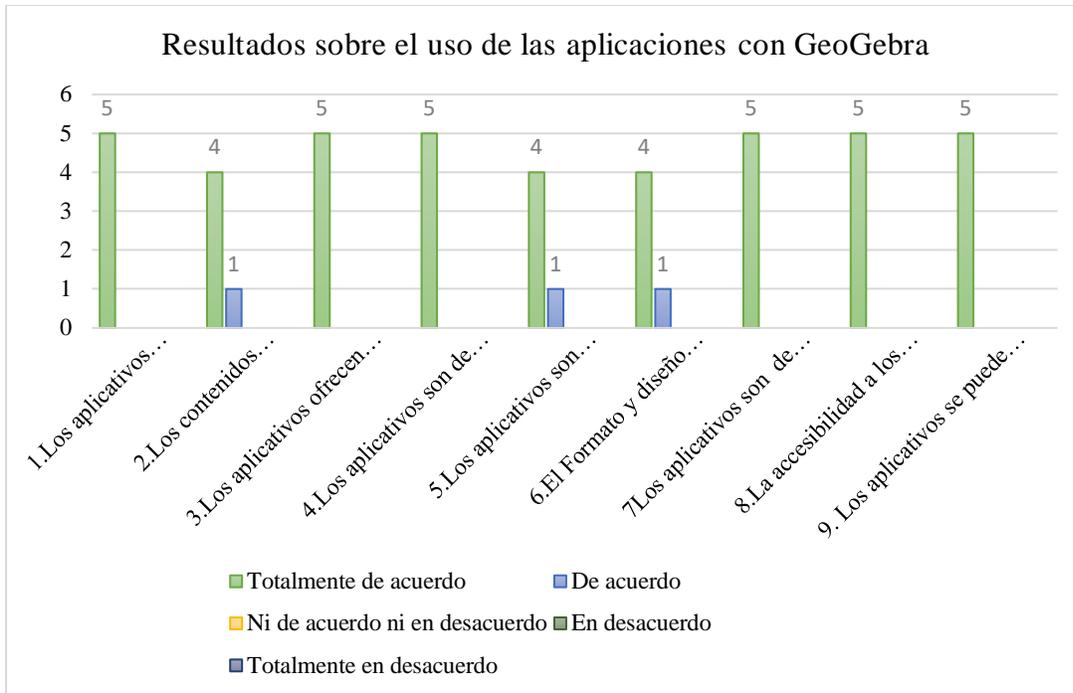


Figura 22. Resultados sobre el uso de los aplicativos con GeoGebra
Fuente: Construcción propia

Hallazgos: En general el aplicativo obtuvo respuestas satisfactorias en los 9 ítems propuestos donde se destacan por parte de los estudiantes que el aplicativo si cumple con los propósitos de los aprendizajes, los aplicativos son didácticos, ayudan a desarrollar el pensamiento crítico, son de fácil interactividad, son motivadores para el aprendizaje ya que permiten de forma lúdica interactuar, el diseño es adecuado y además es de fácil uso permitiendo la reusabilidad.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

Para presentar las conclusiones de este trabajo es importante destacarlas desde cada objetivo del trabajo de investigación.

- Conclusión de acuerdo con el objetivo 1: Diagnosticar el nivel inicial de los estudiantes del grado sexto con relación a los conceptos que tienen sobre las operaciones fundamentales de las fracciones.

Se evidenció una baja comprensión de las nociones de los fraccionarios por parte de los estudiantes del grado 6 de la Institución Educativa Técnica y Agropecuaria El Guayabo de acuerdo a la prueba diagnóstica aplicada en la parte inicial del proceso. Esta baja comprensión de los fraccionarios esta enlazada con los demás resultados de la prueba diagnóstica en cuanto a las operaciones básicas con fraccionarios. El no entender claramente la razón matemática y los componentes de las fracciones dificulta la solución de las operaciones básicas y por ende la no asimilación de lo que se propone en problemas matemáticos que incluyan fracciones.

- Conclusión de acuerdo con el objetivo 2: Diseñar una secuencia didáctica mediada con GeoGebra y los Registros de Representación que permita la interacción de los estudiantes con las cuatro operaciones básicas de las fracciones.

El trabajo con el software GeoGebra y las hojas de trabajo en estudiantes del grado 6 de la Institución Educativa Técnica y Agropecuaria El Guayabo demostró que es una propuesta didáctica muy útil y práctica para el trabajo de las matemáticas en el aula. El promover una

estrategia que incluya el uso de la tecnología es muy atrayente para los estudiantes que se ven más motivados cuando abordan determinados temas en un aula de sistemas. Adicionalmente la favorabilidad que presenta el software GeoGebra en cuanto a la capacidad ilustrativa que permite visualizar los resultados en el momento en que se está generando el proceso de aprendizaje, permite que el estudiante realice los ajustes pertinentes en el momento y sienta más satisfactorios los resultados de tener una mayor autonomía y auto aprendizaje.

- Conclusión de acuerdo con el objetivo 3: Describir los resultados y las dificultades que producen el uso del software GeoGebra y los Registros de Representación como mediador en el aprendizaje de las operaciones básicas con fracciones.

El uso de GeoGebra permitió en los estudiantes la interactividad y la visualización, se nota un logro significativo en el uso de las representaciones pictóricas, no así con las representaciones numéricas. Si bien se puede inferir comprensión de los ejercicios no se evidencian procesos de orden superior a la hora de hacer propuestas gráficas para resolver los apartados de aplicación de lo aprendido, esto bien podría obedecer a la pereza ya que algunos manifestaron que para que realizar tantas gráficas si el software mostraba los resultados.

- Conclusión de acuerdo con el objetivo 4: Evaluar el resultado del uso del software GeoGebra y los Registros de Representación en el aprendizaje de las operaciones básicas de las fracciones.

Los resultados mostrados concuerdan con lo propuesto por Cruz y Puentes Pue (2012) en el que afirma que la posibilidad de utilizar GeoGebra le da un carácter dinámico a este software. Precisamente esta característica es lo que hace de este programa un recurso que puede permitir a

los estudiantes realizar acciones que no son posibles o son difíciles con otros métodos, en concreto con lápiz y papel. Además, permite comprobar si una solución a un problema es correcta o no por el propio alumno, sin la intervención del profesor, lo que promueve un aprendizaje mucho más autónomo que métodos de enseñanza tradicionales.

Por otro lado los resultados obtenidos en el pos -test muestran un avance significativo de las respuestas correctas con respecto al pre test, esto podría ser debido al uso del aplicativo de GeoGebra con el uso de las hojas de trabajo.

5.2 Recomendaciones

Como el uso de software es de licencia abierta, se recomienda a aquellos docentes que deseen implementarlo en el aula hacerle los ajustes pertinentes para que sea adaptado a cualquier grupo de trabajo, así mismo es vital que los estudiantes interactúen primero con el aplicativo pero reforzando que esta herramienta es sólo para el aprendizaje y no para el uso a la hora de resolver los ejercicios ya que en ocasiones por pereza los chicos no les gusta utilizar el lápiz y el papel a la hora de resolver los problemas.

Es importante también destacar que se piensa en un futuro desarrollar este trabajo con fracciones impropias, igualmente favoreciendo los registros de representación semiótica y la representación de problemas.

Referencias

- Bernal, C. (2010). *Metodología de la Investigación para administración, economía y ciencias sociales*. (E. PEARSON. (ed.)).
- Castaño-Arbeláez, N. M., & García-Castro, L. I. (2014). Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. En *Freudenthal* (Vol. 8, Número 16). Posada & Villa.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5342626&info=resumen&idioma=SPA>
- Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2).
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362008000200002&script=sci_arttext
- Congreso de la República. (1994). *Ley 115. Ley General de Educación*.
- Cruz Pichardo, I. M., & Puentes Puentes, Á. (2012). Innovación Educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica. *EDMETIC*, 1(2), 127.
<https://doi.org/10.21071/edmetic.v1i2.2855>
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. (B. P. Lang. (ed.)).
- Duval, Raymond. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives.*, 1, 57-74.
<https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST88006.htm>
- Duval, Raymond. (1998). Signe et objet (1) : Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 6, 139-163. <https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST98008.htm>

Eisenhardt, K. M. (1989). Building Theories from Case Study Research. *The Academy of Management Review*, 14(4), 532. <https://doi.org/10.2307/258557>

Elliott, J. (1990). *La investigación-acción en educación* (Morata).

Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, 6(1), 27-36.

Fernández-Pampillón Cesteros, A. M., Domínguez Romero, E., Armas Ranero, I. de, Fernández-Pampillón Cesteros, A. M., Domínguez Romero, E., & Armas Ranero, I. de. (2011). *Herramienta para la revisión de la Calidad de Objetos de Aprendizaje Universitarios (COdA): guía del usuario. v.1.1.*

Fonseca, R., Hernández, R. V., & Mariño, L. F. (2017). *Enfoque CPA en la resolución de problemas para el aprendizaje de fracciones mediante el uso de software matemático.* <https://ww2.ufps.edu.co/oferta-academica/i-encuentro-internacional-en-educacion-matematica/1109>

Forni, P. (2010). Los estudios de caso: Orígenes, cuestiones de diseño y sus aportes a la teoría social. *Miríada: Investigación en Ciencias Sociales*, 3(5), 61-80. <https://p3.usal.edu.ar/index.php/miriada/article/view/5/168>

García-López, M. del M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula.* <https://core.ac.uk/download/pdf/12342122.pdf>

González del Olmo, D. (2015). *Common errors when learning fractions: A study with 12/13-year-old students in Cantabria.*

González, M. (s. f.). *Iniciación al GeoGebra.*

<https://sites.google.com/site/geogebra1112/caracteristicas-de-geogebra>

Herrera, A. (1998). *Criterios de validez de instrumentos en la investigación científica*. (Ed. Nuevo).

Institución técnica Agropecuaria el Guyabo. (2019). *PRAE*.

Lara Cobos, M. (2012). *Universidad Virtual Escuela de Graduados en Educación*.

https://repositorio.tec.mx/bitstream/handle/11285/571179/DocsTec_12160.pdf?sequence=1

León Robles, G. (2011). *Unidad didáctica: fracciones* [Universidad de Granada].

https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon.pdf

Lewin, K. (1949). *La investigación-acción*.

Macías Sánchez, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. *Igarss*, 4(1), 1-5.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*.

https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias*

Ciudadanas. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje. Matemáticas*.

http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matemáticas.pdf

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education.

Educational Studies in Mathematics, 40(1), 1-24. <https://doi.org/10.1023/A:1003715913784>

NTCM. (2000). *Principles and Standards - National Council of Teachers of Mathematics*.

<https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo.

Revista EMA, 8(2), 157-182. <http://funes.uniandes.edu.co/1521/>

OCDE. (2017). *PISA Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo*.

<http://www.oecd.org/publishing/corrigenda>.

Perera Dzul, P. B., & Valdemoros Álvarez, M. E. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación matemática*, 21(1).

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000100003

Pozo, J. I. (2000). *Aprendices y maestros. La Psicología cognitiva del Aprendizaje* (A. Editorial (ed.)). <https://www.alianzaeditorial.es/libro/alianza-ensayo/aprendices-y-maestros-juan-ignacio-pozo-9788420683492/>

Prieto Gonzalez, J. L. (2016). Interpretations of the fraction in a simulation experience with geogebra. *EDUCACIÓN Y HUMANISMO*, 18(30), 43-57.

<https://doi.org/10.17081/eduhum.18.30.1321>

Rico, L. (1995). *Didáctica de la Matemática como campo de problemas*. (E. Repetto & G. Marrero (eds.); Estrategia, pp. 551-579).

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.

https://scholar.google.com/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Aproximación+a+la+investigación+en+Didáctica+de+la+Matemática&btnG=

Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico*.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de caso* (Morata (ed.); 1.^a ed.).

Suárez - Pasos, M. (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación-acción colaboradora en la educación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 1(1), 40-56.

http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen1/REEC_1_1_3.pdf

Téliz Rebollo, F. A. (2014). *Uso didáctico de las TIC en las buenas prácticas de enseñanza de la*

Matemática [Universidad ORT Uruguay Instituto de Educación].

<https://dspace.ort.edu.uy/bitstream/handle/20.500.11968/3073/Material>

[completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.ort.edu.uy/bitstream/handle/20.500.11968/3073/Material_completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Varettoni, M., & Elichiribehety, I. (2010). Los registros de representaciones que emplean

docentes de Educación Primaria: un estudio exploratorio. *Revista Electrónica de*

Investigación en Educación en Ciencias, 5(2), 44-52.

<https://www.redalyc.org/pdf/2733/273319421005.pdf>

Anexos

Anexo A: Cuestionario

 <p>Universidad de Caldas</p>	<p>UNIVERSIDAD DE CALDAS FACULTAD CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES MAESTRIA EN DIDACTICA DE LA MATEMÁTICA</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

PRUEBA DIAGNÓSTICO SOBRE EL TEMA DE FRACCIONES

Nombre del alumno:

Fecha:

Nombre de la Sede:

Grupo:

La encuesta que va a contestar es parte de un proyecto de investigación. El objetivo es indagar acerca del grado de conocimiento que tienen los estudiantes del grado 8, en cuanto a las nociones básicas de fracción y las operaciones básicas con fraccionarios. Tenga en cuenta las siguientes sugerencias para contestar.

1. Lea detenidamente cada Pregunta
2. Una vez que entienda la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.
3. Existe un espacio para que justifique detalladamente tu respuesta. Si requieres realizar alguna operación, escríbela a un lado de la pregunta.
4. En caso que no sepas la respuesta, selecciona la opción: No sé.
5. Conteste con lapicero negro la siguiente encuesta.

1. Al sumar $\frac{3}{4} + \frac{3}{5}$ El resultado que se obtiene es:

- a. $\frac{27}{20}$
- b. $\frac{3}{28}$
- c. $\frac{14}{9}$
- d. $\frac{18}{11}$
- e. No sé.

Explicación _____

2. ¿Cuál fracción corresponde a todas las partes sombreadas de la figura 1?

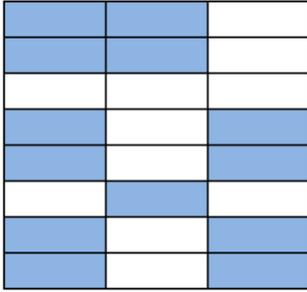


Figura 1.

- a. $\frac{11}{24}$
- b. $\frac{11}{13}$
- c. $\frac{13}{24}$
- d. $\frac{13}{11}$
- e. No sé

Explicación _____

3. El producto de las fracciones $\frac{18}{11} \times \frac{3}{5}$ es

- a. $\frac{54}{16}$
- b. $\frac{21}{55}$
- c. $\frac{21}{16}$
- d. $\frac{54}{55}$
- e. No sé

Explicación _____

4. El cociente de las fracciones $\frac{12}{9} \div \frac{7}{4}$

- a. $\frac{5}{5}$
- b. $\frac{3}{7}$
- c. $\frac{48}{16}$
- d. $\frac{16}{21}$
- e. No sé

Explicación _____

5. Ernesto tiene 5 paquetes de 100 hojas de papel de regalo y los quiere utilizar para surtir las 7 sucursales de las mercerías que tiene. ¿Cuántas hojas le corresponden a cada mercería de forma equitativa, si tiene que expresar el resultado en cociente fraccionario?

- a. $\frac{100}{7}$
- b. $\frac{500}{7}$
- c. $\frac{7}{100}$
- d. $\frac{7}{500}$
- e. No sé

Explicación

6. Al terminar la fiesta organizada por Andrés, sobró más de chocolatina y media, tal como se muestra en el siguiente dibujo:



¿Cuál de las siguientes expresiones representa la chocolatina que sobró?

- a. Siete cuartos $\left[\frac{7}{4}\right]$
- b. Un medio $\left[\frac{1}{2}\right]$
- c. Tres cuartos $\left[\frac{3}{4}\right]$
- d. Cuatro tercios $\left[\frac{4}{3}\right]$
- e. No sé

Explicación

7. Mauricio compra un TV en \$450.000 y lo vende en los $\frac{7}{10}$ del valor que lo compró ¿Cuánto dinero perdió después de la compra?

- a. \$45.000
- b. \$90.000
- c. \$135.000
- d. \$180.000
- e. No sé

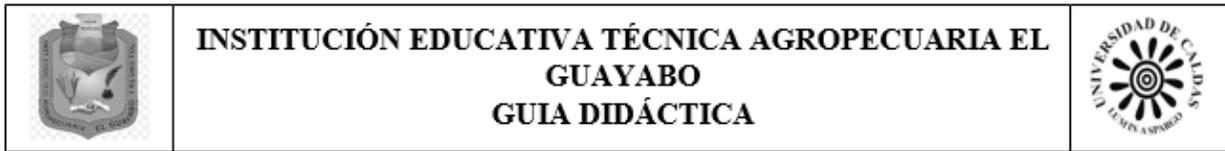
Explicación

8. Jenny perdió $\frac{2}{3}$ de su dinero y prestó $\frac{1}{2}$ de lo que le quedaba. ¿Qué parte de su dinero le quedó?

- a. $\frac{1}{9}$
- b. $\frac{1}{8}$
- c. $\frac{1}{7}$
- d. $\frac{1}{6}$
- e. No sé

Explicación _____

¡MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo B: Hoja de Trabajo 1

Nombre del estudiante: _____ Fecha: _____

Grupo: _____

1. Declaración de competencias:

- Identifica y grafica fracciones propias e impropias.
- Realiza suma de fracciones homogéneas y heterogéneas.
- Resuelve situaciones problemas concernientes con la suma de fracciones.

2. Secuencia metodológica:

- Primero usarás el software GeoGebra para aprender los diferentes tipos de representación de una fracción.
- Luego usarás GeoGebra para hacer representaciones gráficas de fracciones propias.
- Posterior deberás hacer el procedimiento para realizar la operación suma por medio de registros de representación gráfico.
- En la parte final debes dejar de usar GeoGebra para resolver únicamente con lápiz y papel algunos ejercicios relacionados el ejercicio propuesto.
- En la fase de socialización, participa en la discusión y hazle saber tus puntos de vista al profesor y a tus compañeros.

3. Diagnóstico

- Representa de forma gráfica usando polígonos las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{5}{3}; 12$$

- Determina qué fracción es propia y cuál es impropia. Explica.

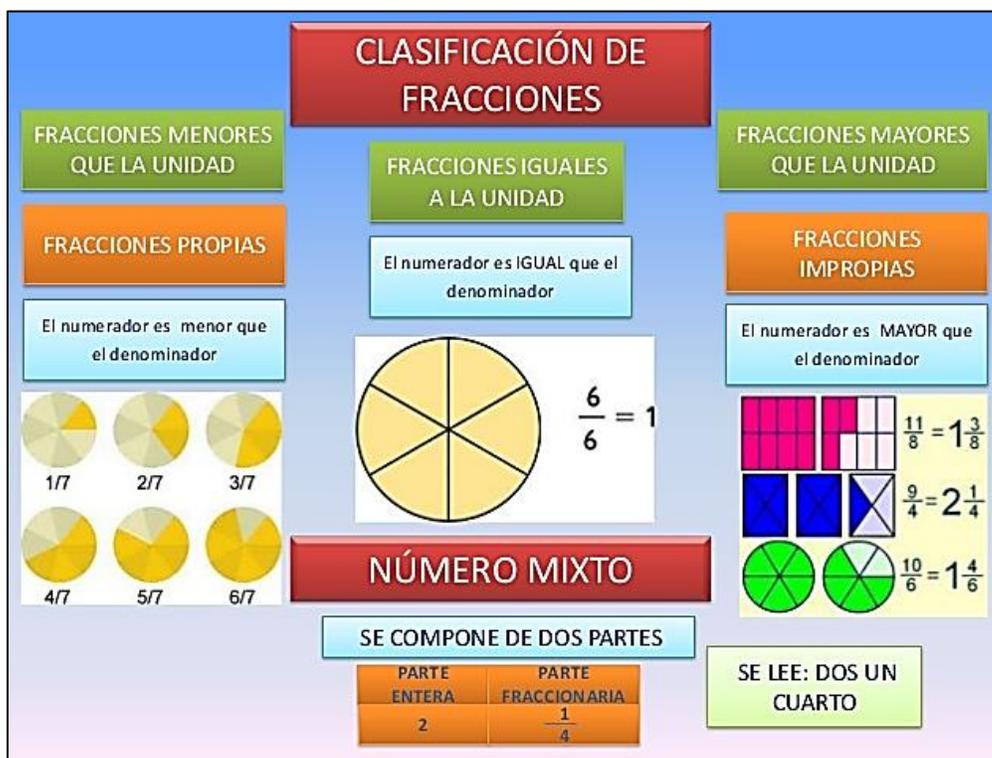
4. Motivación

El origen de las fracciones, o quebrados, es muy remoto. Ya eran conocidas por los babilonios, egipcios y griegos. Los egipcios resolvían problemas de la vida diaria mediante operaciones con fracciones. Entre ellas la distribución del pan, el sistema de construcción de pirámides y las medidas utilizadas para estudiar la tierra. Esto lo comprobamos en numerosas inscripciones antiguas como el Papiro de Ahmes. En el siglo VI después de Cristo fueron los hindúes quienes

establecieron las reglas de las operaciones con fracciones en el siglo IV después de Cristo. En esa época, Aryabhata se preocupó de estas leyes, y después lo hizo Bramagupta, en el siglo VII. Las reglas que utilizamos en la actualidad para trabajar con fracciones, fueron obra de Mahavira- en el siglo IX- y Bháskara-en el siglo XII. El nombre de fracción se lo debemos a Juan de Luna, que tradujo al latín, en el siglo XII, el libro de aritmética de "Al-Juarizmi". El empleó la palabra "FRACTIO" para traducir la palabra árabe "al-Kasr", que significa QUEBRAR, ROMPER. Las fracciones se conocen también con el nombre de "QUEBRADOS". El origen de las fracciones apunta a la necesidad de contar de medir y de repartir, entre otras. Tomado de: <https://sites.google.com/site/cienciasnaturalesljbj/home#:~:text=El%20origen%20de%20las%20fracciones,diaria%20mediante%20operaciones%20con%20fracciones.>

4.1 Conceptos básicos

4.1.1 Clasificación de las fracciones:



Fuente: <https://es.slideshare.net/MARMOL1958/clasificacin-de-fracciones-15624948>

4.1.2 Suma de fracciones por el método gráfico:

Dadas dos fracciones (Homogéneas o heterogéneas), se pueden representar por medio de polígonos regulares (En este caso siempre se usarán cuadrados). La primera fracción (A), se

puede dibujar como un cuadrado dividido en n partes iguales, por convención las divisiones de la unidad se trazarán con líneas horizontales (Ver polígono rojo). La segunda fracción (B) también es un cuadrado que se puede dividir en n partes iguales, por convención las divisiones de la unidad se trazarán con líneas verticales (Ver polígono azul).

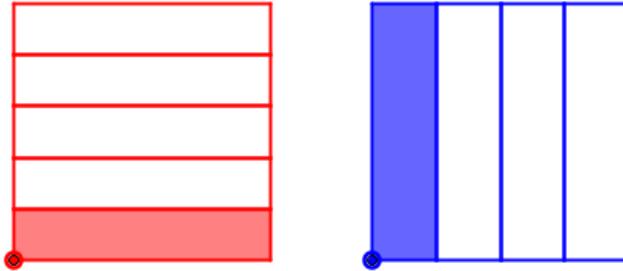


Figura 1. Formas de representación de dos fracciones con el método geométrico

Ahora vamos a realizar la operación de la suma, para ello es necesario sobreponer cualquiera de los cuadrados (propiedad conmutativa), al estar superpuestos las líneas horizontales del cuadrado A (Rojo), se entrecruzan con las líneas verticales del cuadrado B (Azul), formando un polígono nuevo (C), al que lo conforma una rejilla de cuadrados más pequeños todos de igual tamaño (figura 2)

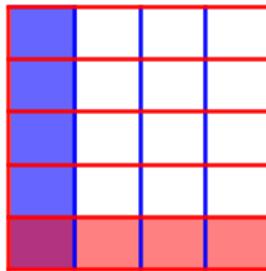


Figura 2. Conformación de la operación suma de fracciones por el método geométrico

Esta superposición de ambos cuadrados es la unión del polígono A, con el polígono B, y recordemos que una unión es la suma todos los elementos. Ahora comprobemos.

Sumemos $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$

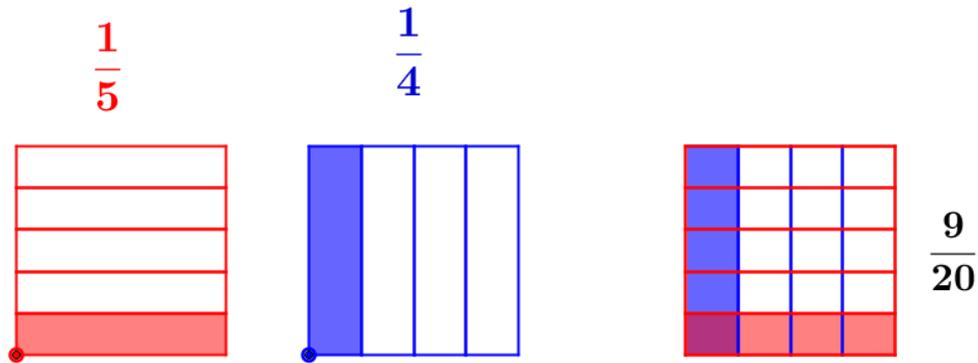
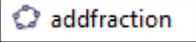


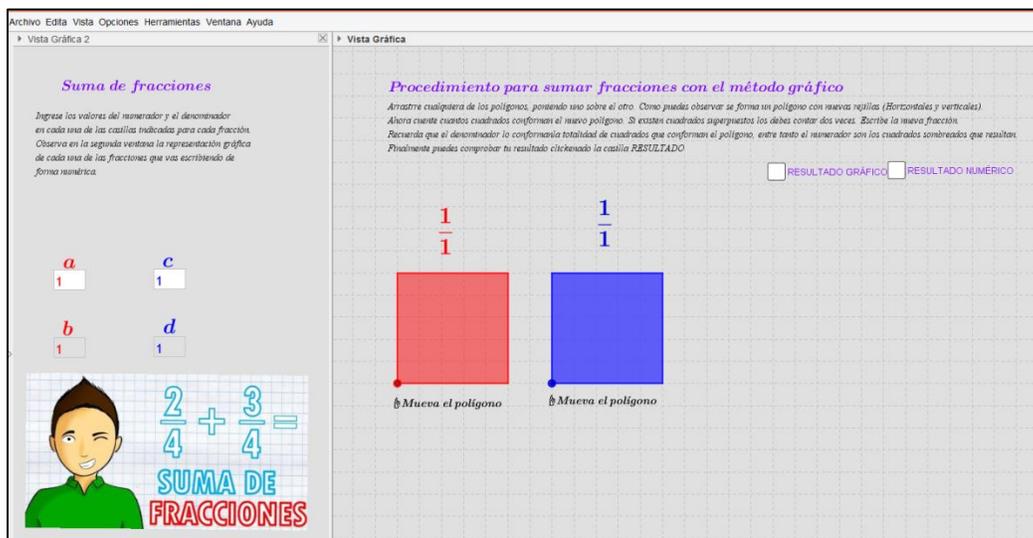
Figura 3. Ejemplo de una suma de fracciones por el método gráfico

Como se puede observar en el último cuadrado se formaron 5 cuadrados azules y 4 cuadrados rojos, $5 + 4 = 9$ que será el numerador; y el denominador equivale al total de cuadrados que conforman el nuevo polígono 20, resultando entonces la fracción $\frac{9}{20}$.
 Nótese que si se superponen cuadrados estos se deben contar de a uno.

5. Desarrollo y aplicación de la hoja de trabajo

- En el escritorio de su PC, abra el archivo  .

Cuando haya abierto el software aparecerá una ventana de trabajo con la siguiente figura



En el lado izquierdo encontrarás 4 casillas en las que puedes ingresar los valores de las fracciones de forma numérica, al lado derecho aparecerán las representaciones gráficas a medida que cambies los valores numéricos también cambiarán las representaciones gráficas.

- Ahora empieza a manipular la aplicación:

5.1 Ingresa en la casilla (a): 2 y en la casilla (b) 3; la fracción representada es propia o impropia.

Explica: _____

5.2 Resuelva las siguientes sumas utilizando el método gráfico del aplicativo de GeoGebra, realiza las respectivas representaciones empleando los cuadrados.

- $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$



- $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$



- $\frac{2}{9} + \frac{3}{4}$



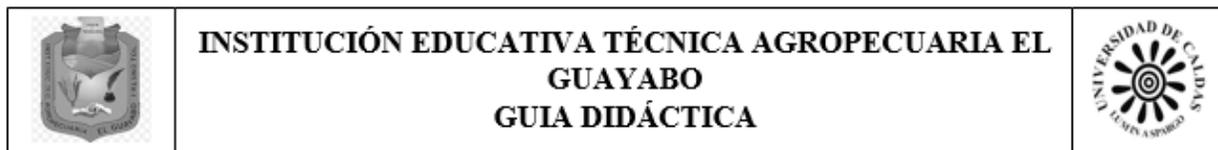
5.3 Ahora te propongo que resuelvas la siguiente suma de fracciones impropias, explica cómo lo resolvería utilizando el método gráfico

$$\frac{9}{5} + \frac{3}{2}$$

6. *Aplicación.*

Te propongo la siguiente situación cotidiana, resuélvelo utilizando únicamente el método gráfico.

María y Mario son dos hermanos gemelos, el día de su cumpleaños quieren hacer una torta para celebrar tan maravilloso día, para ello deben usar los siguientes ingredientes: $\frac{2}{3}$ de una libra de harina; $\frac{1}{4}$ de taza de azúcar; $\frac{1}{2}$ libra de mantequilla; $\frac{3}{4}$ de un litro de leche y $2\frac{1}{2}$ claras de huevos. Su madre les pide que deben darle el valor exacto de la suma de las partes necesarias para fabricar la torta y en premio a su laboriosidad les dará un regalo sorpresa.

Anexo C: Hoja de Trabajo 2

Nombre del estudiante: _____ Fecha: _____

Grupo: _____

1. Declaración de competencias:

- Identifica las propiedades de la resta de fracciones y los términos de una fracción
- Realiza restas de fracciones homogéneas y heterogéneas.
- Resuelve situaciones problemas concernientes con la resta de fracciones.

2. Secuencia metodológica:

- Primero usarás el software GeoGebra para comprender y aplicar el concepto de resta de fracciones condicionadas la campo \mathbf{Z}^+
- Luego usarás GeoGebra para hacer representaciones gráficas de fracciones propias.
- Posterior deberás hacer el procedimiento para realizar la operación resta por medio de registros de representación gráfico.
- En la parte final debes dejar de usar GeoGebra para resolver únicamente con lápiz y papel algunos ejercicios relacionados con el ejercicio propuesto.
- En la fase de socialización, participa en la discusión y hazle saber tus puntos de vista al profesor y a tus compañeros.

3. Diagnóstico

- ¿Es posible realizar la siguiente resta de fracciones?, ¿Cómo te imaginas realizar la operación de manera gráfica? Resuelve estas dos cuestiones con el siguiente ejemplo:

$$\text{Restar } \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$$

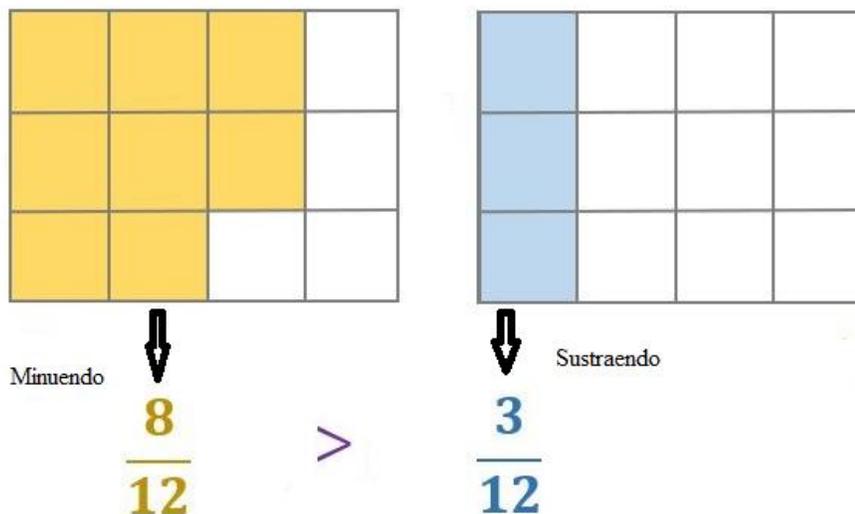
4. Motivación

La resta no tiene las propiedades de la suma. La resta no es una operación interna, porque para que dos números FRACCIONARIOS se puedan restar es necesario que el número minuendo sea mayor que el número sustraendo. Si eso no ocurre esa resta no es posible en el conjunto de los números FRACCIONARIOS porque el resultado no sería una fracción. La resta no tiene la propiedad conmutativa, es decir, no podemos intercambiar la posición del minuendo con la del sustraendo, tampoco tiene la propiedad asociativa.

4.1 Conceptos básicos

4.1.1 Partes de la operación de una fracción

Es importante aclarar por medio de una gráfica las condiciones dadas para realizar la operación resta de una fracción. En primer lugar el minuendo es el primero de los dos números que intervienen y es la cantidad de la que debe restarse con otra (En nuestro caso el minuendo siempre será mayor que el sustraendo). El sustraendo es el segundo de los dos números que intervienen y es la cantidad que debe restarse de la otra. En la gráfica que se muestra a continuación se puede ver mejor la opción vista con una fracción homogénea.



Como se puede observar $\frac{8}{12}$ (Minuendo) es mayor que $\frac{3}{12}$ (Sustraendo)

4.1.2 Resta de fracciones por el método gráfico:

El procedimiento para la resta de fracciones es el mismo que se hace para la suma. Se tienen los dos polígonos (Rojo y Azul), se superponen, pero hay que dejar claro en la operación de la resta

para fracciones positivas (Z^+), se debe cumplir una condición: “El minuendo siempre es mayor que el sustraendo”, para determinar esto bastará con dividir cada una de las fracciones, o sea el numerador entre el denominador. Una forma rápida de hacerlo consiste en multiplicar por 10 el numerador y hacer la división, la fracción mayor tendrá un cociente mayor que la otra.

Miremos en el ejemplo anterior si es posible realizar la resta de las dos fracciones.

$$\text{Restemos } \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$$

Primero debemos comprobar que un quinto sea mayor que un cuarto:

$$\frac{10}{5} = 2 \text{ y } \frac{10}{4} = 2.5$$

Lo anterior afirma que esta resta no se puede realizar en este subconjunto numérico; pero si se puede realizar la operación $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; probémoslo entonces de forma gráfica o geométrica

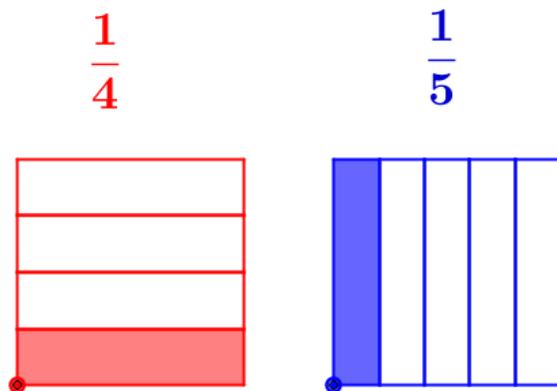


Figura 1. Posición correcta minuendo mayor que sustraendo para la operación de la resta

El procedimiento de la resta es el mismo que para la suma, en este caso superponemos el polígono rojo sobre el azul y aplicamos la operación de diferencia entre conjuntos. En la figura 2, se observa la unión de los dos cuadrados, antes de aplicarle la operación diferencia

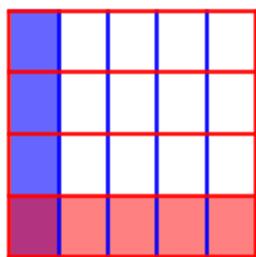


Figura 2. Procedimiento antes de realizar la operación diferencia de fracciones

Ahora con ayuda de un borrador o tapando los cuadrados se procede a retirar un cuadrado rojo por uno azul del polígono resultante tantas veces se repitan de la misma manera, en el momento que ya no existan diferencias, se anotan cuantos cuadrados quedan sin tapar y este será el resultado que llevará el numerador, entre tanto el denominador son el total de cuadrados conformado por la superposición del polígono rojo sobre el azul.

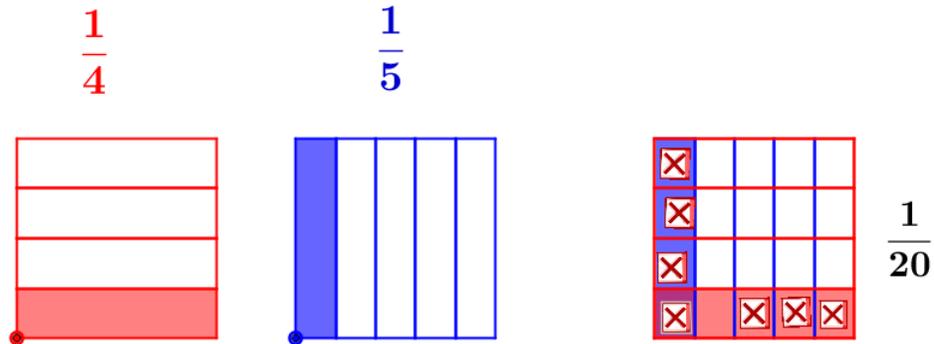
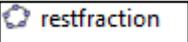


Figura 3. Ejemplo de una resta de fracciones por el método gráfico

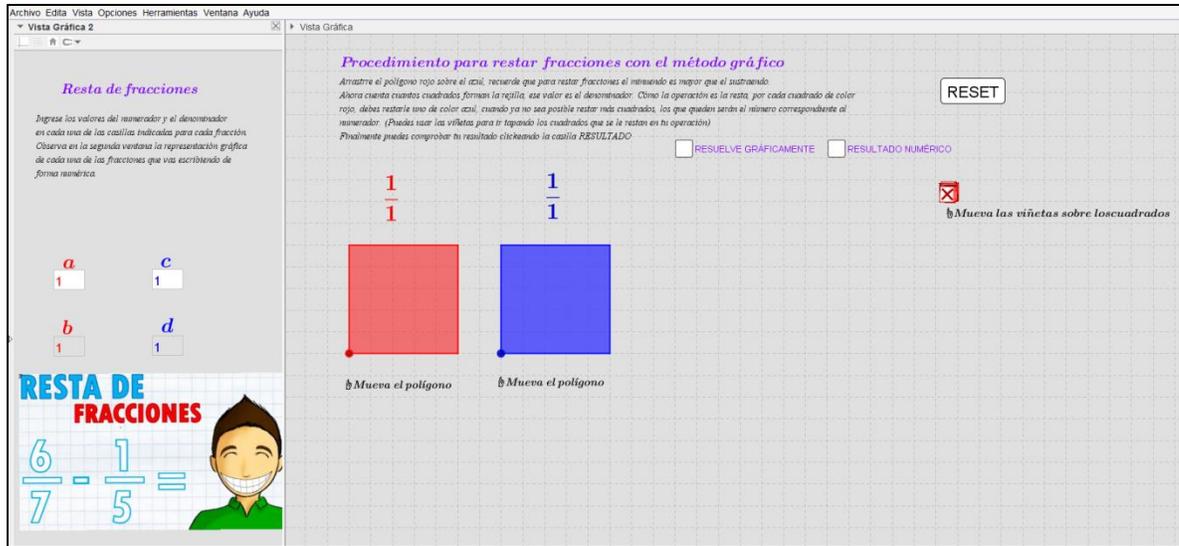
Como se puede observar en el último cuadrado se retiraron 4 cuadrados azules y 4 cuadrados rojos del total que eran 9, así sólo quedó un cuadrado rojo que será el numerador; y el denominador equivale al total de cuadrados que conforman el nuevo polígono 20, resultando entonces la fracción $\frac{1}{20}$

Nótese que si se superponen cuadrados estos se deben quitar igual que una diferencia.

5. Desarrollo y aplicación de la hoja de trabajo

- En el escritorio de su PC, abra el archivo. 

Cuando haya abierto el software aparecerá una ventana de trabajo con la siguiente figura



En el lado izquierdo encontrarás 4 casillas en las que puedes ingresar los valores de las fracciones de forma numérica, al lado derecho aparecerán las representaciones gráficas a medida que cambies los valores numéricos también cambiarán las representaciones gráficas.

- Ahora empieza a manipular la aplicación:
- Ingresas en la casilla (a): 2 y en la casilla (b) 5. Luego en la casilla (c): 3 y en la d (4).

¿Sin realizar el procedimiento es posible hacer la operación indicada?
Explica: _____

- Resuelva las siguientes restas utilizando el método gráfico del aplicativo de GeoGebra, realiza las respectivas representaciones empleando los cuadrados.

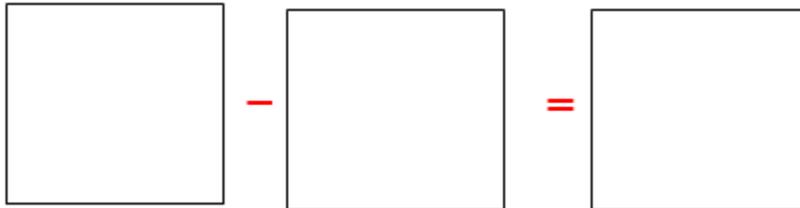
- $\frac{2}{3} - \frac{3}{7}$



- $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$



- $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

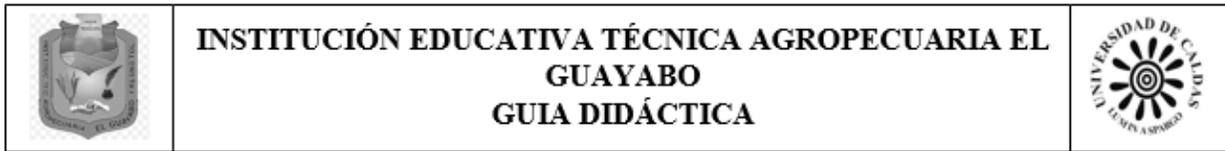


- Ahora te propongo que resuelvas la siguiente resta de fracciones impropias, explica cómo lo resolvería utilizando el método gráfico

$$\frac{9}{5} - \frac{3}{2}$$

6. Aplicación.

Hoy fui al mercado y pedí $\frac{3}{4}$ de una paca de panela, mi interés era repartirlo a varias personas afectadas por la pandemia. Visite a una familia cercana y les di $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{4}$ que había comprado inicialmente, luego pasé donde doña Julia y les entregué $\frac{1}{5}$ de lo que me quedaba. ¿Cuánto me quedó de panela para llevar a mi casa? Resuelve el problema mediante el método gráfico.

Anexo D: Hoja de trabajo 3

Nombre del estudiante: _____ Fecha: _____

Grupo: _____

1. Declaración de competencias:

- Identifica las propiedades de la multiplicación de fracciones y los términos de una fracción
- Realiza multiplicaciones de fracciones homogéneas y heterogéneas.
- Resuelve situaciones problemas concernientes con la multiplicación de fracciones.

2. Secuencia metodológica:

- Primero usarás el software GeoGebra para comprender y aplicar el concepto de multiplicación de fracciones positivas.
- Posterior deberás hacer el procedimiento para realizar la operación producto por medio de registros de representación gráfico.
- En la parte final debes dejar de usar GeoGebra para resolver únicamente con lápiz y papel algunos ejercicios relacionados con el ejercicio propuesto.
- En la fase de socialización, participa en la discusión y hazle saber tus puntos de vista al profesor y a tus compañeros.

3. Diagnóstico

- Ahora que conoces y manipulas correctamente la suma y resta de fracciones, podrías usar la operación de la multiplicación de fracciones. Este proceso se asemeja a la operación intersección entre fracciones $A \cap B$. Recuerda que la intersección de dos conjuntos son los elementos que se repiten en ambos conjuntos. Aplicando los mismos procedimientos gráficos y conociendo la operación intersección entre conjuntos, podrías hallar de manera gráfica la

siguiente multiplicación: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

4. Motivación

La *multiplicación de fracciones* representa la parte de una parte. Observemos el siguiente ejemplo: Carla y Daniela se van a comer una pizza. Daniela corta la pizza en 6 trozos iguales. Carla tiene hambre y le apetece un trozo, pero como los trozos que hay le parecen demasiado grandes, decide cortar uno de los trozos por la mitad.

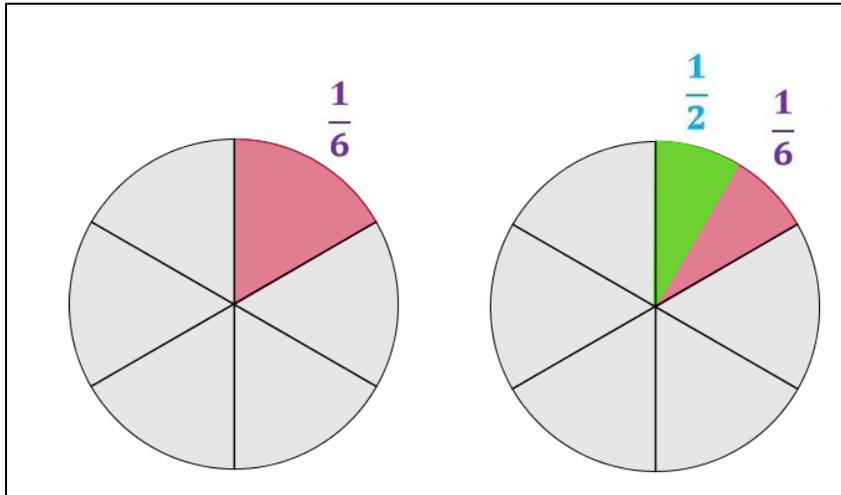


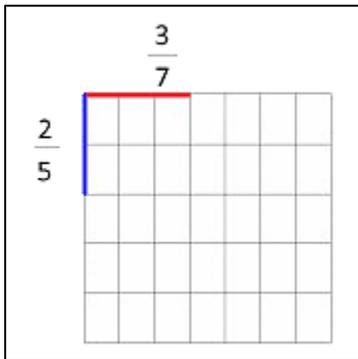
Figura 1

Como se observa en la figura 1, la mitad de $\frac{1}{6}$ es la doceava parte de la pizza y resulta de multiplicar $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$. El trozo que cogerá Carla será un doceavo ($\frac{1}{12}$) y se obtiene como el producto de dos fracciones.

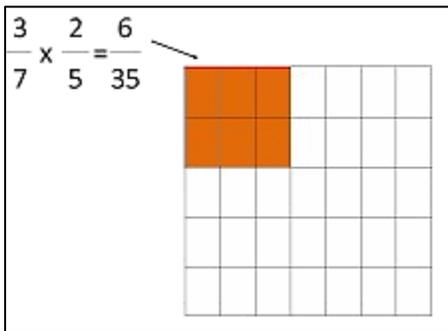
4.1 Conceptos básicos

4.1.1 La multiplicación de fracciones y el método en paralelo

Multiplicar fracciones es muy sencillo, tan solo tenemos que seguir la siguiente regla: El numerador es el resultado de multiplicar los numeradores de las fracciones. El denominador es el resultado de multiplicar los denominadores de las fracciones. Es lo que normalmente conocemos como **multiplicar en paralelo** (los numeradores con los numeradores y los denominadores con los denominadores, una buena forma para realizar operaciones del producto de fracciones es con el método gráfico, observemos este ejemplo:



Tomamos un rectángulo en el que las filas y las columnas se corresponden con los denominadores de las fracciones a multiplicar y señalamos las partes de cada fila y columna que representan las fracciones.



Como se ve, el resultado de la multiplicación es la parte de color naranja que se interpreta como **6** partes de **35** en qué está dividido. El numerador es **6** que corresponde a un rectángulo de 3 por 2 (el de arriba por el de arriba). El denominador es **35** que corresponde a un rectángulo de 7 por 5 (el de abajo por el de abajo).

4.1.2 Multiplicación de fracciones por el método gráfico:

El procedimiento inicial es idéntico al de la suma, acá no hay problema si se superpone cualquiera de los cuadrados porque en la multiplicación se aplica también la conmutatividad y de la misma forma que la operación de conjuntos el producto es la operación de la intersección, veamos la figura 10.

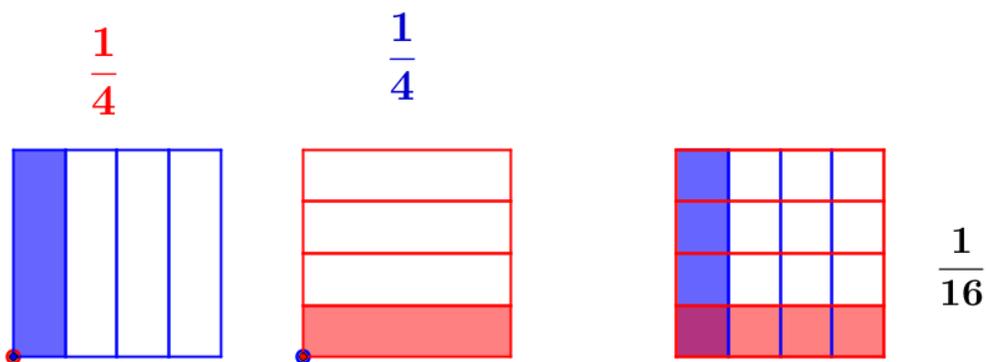


Figura 2. Ejemplo de una multiplicación de fracciones por el método gráfico.

Como se observa el procedimiento es muy simple al ser el producto una intersección, se puede observar que únicamente se intersectan un cuadrado rojo con uno azul, este será el numerador y el denominador lo conforma el total de cuadrados que resultan de superponer tanto el polígono rojo sobre el polígono azul, en la figura 11, se muestra detallado el resultado de la operación.

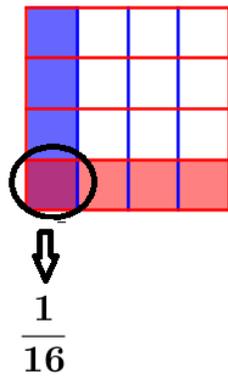
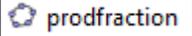


Figura 3. Procedimiento para realizar la multiplicación de una fracción

5. Desarrollo y aplicación de la hoja de trabajo

- En el escritorio de su PC, abra el archivo. 

Cuando haya abierto el software aparecerá una ventana de trabajo con la siguiente figura

En el lado izquierdo encontrarás 4 casillas en las que puedes ingresar los valores de las fracciones de forma numérica, al lado derecho aparecerán las representaciones gráficas a medida que cambies los valores numéricos también cambiarán las representaciones gráficas.

- Ahora empieza a manipular la aplicación:
- Ingresa en la casilla (a): 3 y en la casilla (b) 7. Luego en la casilla (c): 1 y en la d (2).
Sin realizar el procedimiento algebraico del método del paralelo escribe el resultado en forma gráfica.

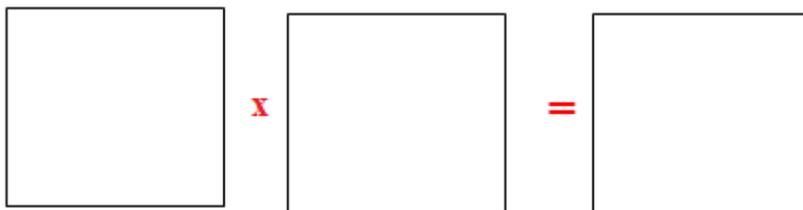
Explica: _____

5.1 Resuelva las siguientes restas utilizando el método gráfico del aplicativo de GeoGebra, realiza las respectivas representaciones empleando los cuadrados.

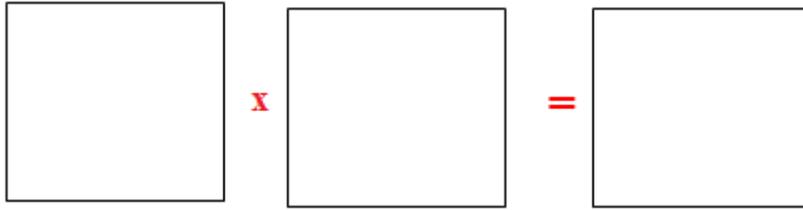
- $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$



- $\frac{3}{7} \times \frac{1}{2}$



- $\frac{3}{9} \times \frac{2}{5}$



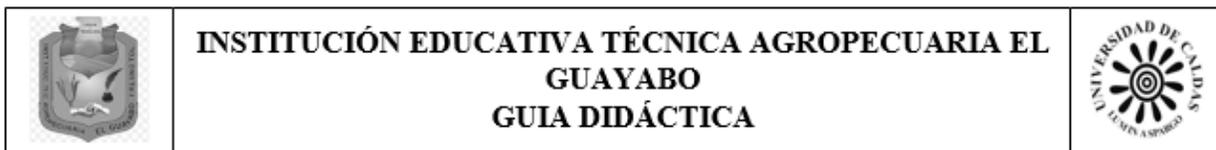
5.2 Ahora te propongo que resuelvas el siguiente producto de fracciones impropias, explica cómo lo resolvería utilizando el método gráfico

$$\frac{7}{5} \times \frac{5}{2}$$

6 Aplicación.

En una fiesta se comparte un pastel y al final solo quedan $\frac{2}{5}$ del mismo. Si Andrés se come $\frac{1}{3}$ de lo que queda, ¿qué fracción del total se comió? Resolver por el método gráfico.

Anexo E: Hoja de trabajo 4



Nombre del estudiante: _____ Fecha: _____

Grupo: _____

1. Declaración de competencias:

- Identifica las propiedades de la división de fracciones y los términos de una división de fracciones
- Realiza divisiones de fracciones homogéneas y heterogéneas.
- Resuelve situaciones problemas concernientes con la división de fracciones.

2. Secuencia metodológica:

- Primero usarás el software GeoGebra para comprender y aplicar el concepto de división de fracciones positivas.
- Posterior deberás hacer el procedimiento para realizar la operación división por medio de registros de representación gráfico.
- En la parte final debes dejar de usar GeoGebra para resolver únicamente con lápiz y papel algunos ejercicios relacionados con el ejercicio propuesto.
- En la fase de socialización, participa en la discusión y hazle saber tus puntos de vista al profesor y a tus compañeros.

3. Diagnóstico

Dividir consiste en repartir en partes iguales cierta cantidad, te propongo que dividas en 3 partes iguales la siguiente fracción $\frac{3}{4}$

4. Motivación

La *división de dos fracciones* es otra fracción que tiene como numerador el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor, y cuyo denominador es el producto del dividendo por el numerador del divisor. Las partes de una división de una fracción se pueden observar en la figura 1.

$$\frac{7}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{28}{3}$$

Dividendo Divisor Cociente

Figura 1

4.1 Conceptos básicos

4.1.1 La división de fracciones y el método cruzado.

La división de fracciones no es otra cosa que la multiplicación cruzada de los términos de las dos fracciones. Ojo se debe dejar claro qué fracción es dividida por otra fracción para poder determinar el producto cruzado de los términos de la fracción, es decir el producto cruzado de extremos por medios.

¿Cómo funciona?

- ▶ Cuando tengamos una "división de fracciones"
- SIGUIENTE ▶ Multiplicamos:
 - "Extremo por extremo"
 - "Medio por medio"
- SIGUIENTE ▶ Acomodamos los números:
 - "El primero arriba, el segundo abajo"

Extremos $2 \times 5 = 10$

Medios $3 \times 3 = 9$

Acomodamos

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{10}{9}$$

Figura 2. Tomada de <http://blogdelasmaticas1iiiikgr.blogspot.com/2015/11/ley-de-la-hamburguesa-o-ley-de-extremos.html>

4.1.2 División de fracciones por el método gráfico:

Es importante recordar que la división de una fracción es el producto cruzado de extremos por medios:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Los extremos son a y d; y los medios son b y c

Luego $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$

Esta es la manera algebraica cómo funciona la división, ahora observemos como se hace de manera gráfica. El procedimiento es idéntico a todas las anteriores operaciones se deben superponer los cuadrados el rojo encima del azul, por ejemplo dividamos $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$

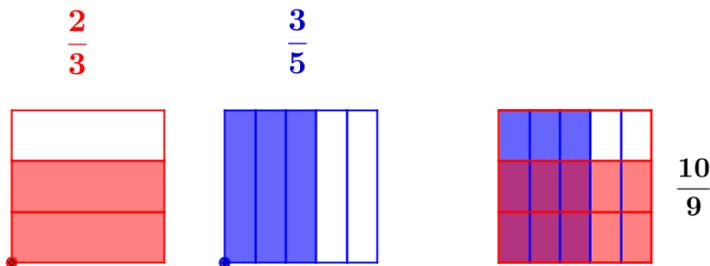
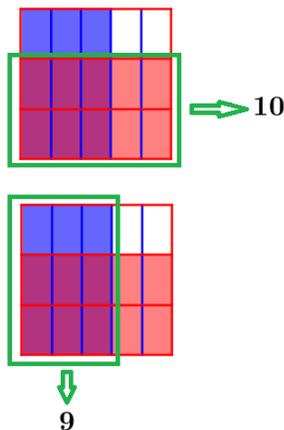


Figura 3. Ejemplo de una multiplicación de fracciones por el método gráfico

Para este caso se debe ser cuidadoso, ya que la operación es meramente posicional, para conocer el numerador de la fracción contamos los cuadros que se forman horizontalmente (Rojos) y para conocer el denominador contamos los cuadros verticales (Azules). Nótese que no importan ya las rejillas o total de cuadrados formados de la superposición. Observemos el procedimiento en la figura 4.



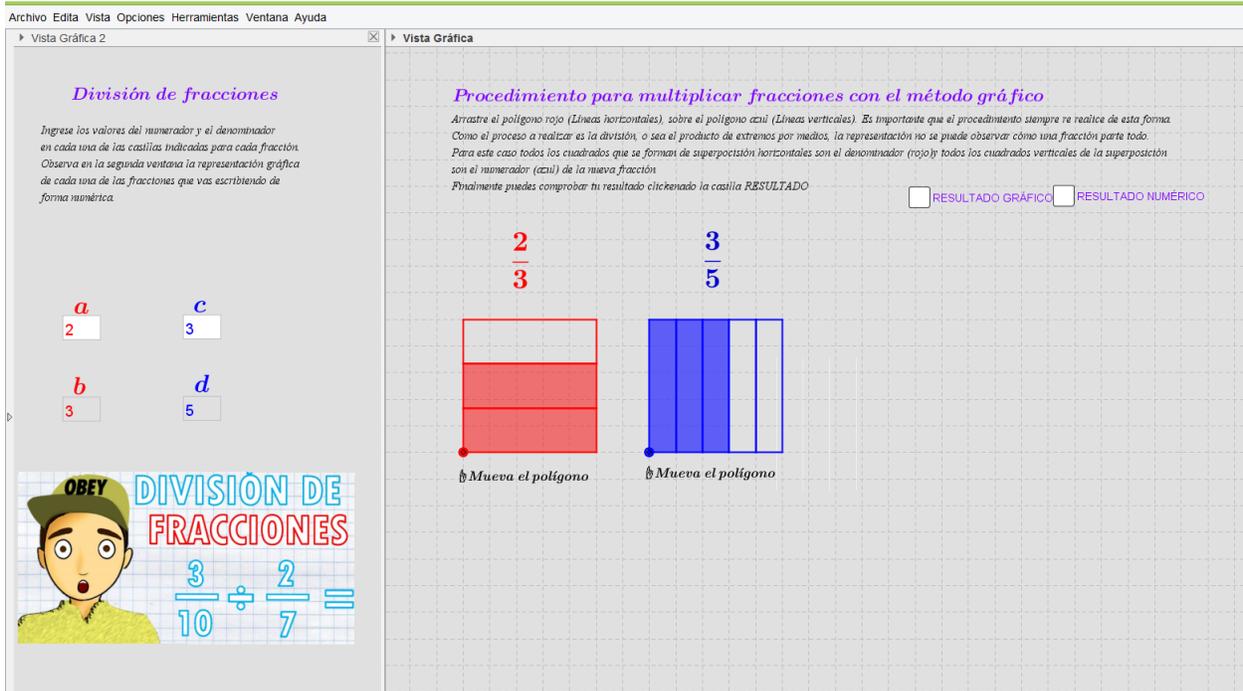
Cómo se puede observar en la figura 13, lo importante para conocer el resultado es la cantidad de cuadrados que se forman tanto horizontales como verticales, sin importar las intersecciones, como se puede ver el resultado de $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{10}{9}$

Figura 4. Procedimiento para realizar la división de una fracción

5. Desarrollo y aplicación de la hoja de trabajo

- En el escritorio de su PC, abra el archivo. 

Cuando haya abierto el software aparecerá una ventana de trabajo con la siguiente figura



En el lado izquierdo encontrarás 4 casillas en las que puedes ingresar los valores de las fracciones de forma numérica, al lado derecho aparecerán las representaciones gráficas a medida que cambies los valores numéricos también cambiarán las representaciones gráficas.

- Ahora empieza a manipular la aplicación:

Observa la pantalla inicial que has abierto, puedes resolver el problema planteado de forma gráfica

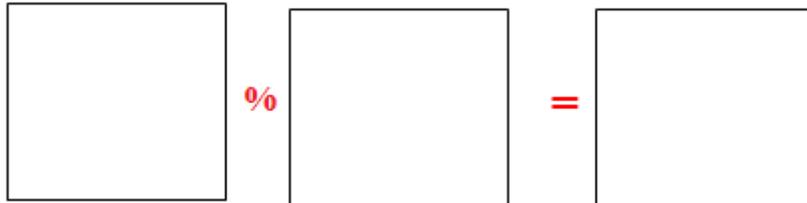
Explica: _____

Resuelva las siguientes restas utilizando el método gráfico del aplicativo de GeoGebra, realiza las respectivas representaciones empleando los cuadrados.

- $\frac{1}{5} \div \frac{1}{4}$



- $\frac{5}{7} \div \frac{2}{3}$



- $\frac{4}{9} \div \frac{3}{5}$

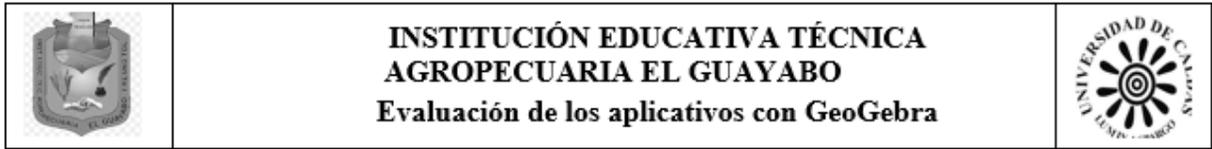


Ahora te propongo que resuelvas el siguiente producto de fracciones impropias, explica cómo lo resolvería utilizando el método gráfico

$$\frac{8}{5} \div \frac{3}{2}$$

6. Aplicación.

Marta compró un delicioso queso en la plaza de mercado que pesaba $\frac{3}{4}$ de un kilo. Si lo parte en pedazos de $\frac{1}{8}$ de kilo. ¿Cuántos pedazos de queso puede sacar?

Anexo F: Encuesta de satisfacción del uso de GeoGebra.

Apreciado estudiante a continuación lo invito a realizar la siguiente encuesta que es de manera anónima y tiene como propósito valorar el uso de los aplicativos con los que interactuaste a lo largo del desarrollo de las hojas de trabajo. Responde de manera honesta de acuerdo con los siguientes ítems:

5 = Totalmente de acuerdo; 4 = De acuerdo; 3 = Ni de acuerdo ni en desacuerdo; 2 = En desacuerdo; 1 = Totalmente en desacuerdo. Para ello marca con una X dentro de los cuadrados de la derecha la respuesta que usted crea conveniente, si tiene alguna observación la puedes hacer en la respectiva casilla. Gracias por su colaboración

Formato de Evaluación del OA	1	2	3	4	5
1. Los aplicativos diseñados con GeoGebra cumplen con el propósito para el aprendizaje de las fracciones.					
Observaciones:					
2. Los contenidos desarrollados en los aplicativos fueron amenos y didácticos.					
Observaciones:					
3. Los aplicativos ofrecen alternativas para desarrollar el pensamiento crítico.					
Observaciones:					
4. Los aplicativos sonde fácil interactividad y adaptabilidad para el aprendizaje.					
Observaciones:					
5. Los aplicativos son interactivos y contribuyen con el aprendizaje y la motivación.					
Observaciones:					
6. El Formato y diseño empleado por los aplicativos es muy adecuado.					
Observaciones:					

7. Los aplicativos son de fácil uso para el aprendizaje y para su manipulación.					
Observaciones:					
8. La accesibilidad a los aplicativos es fácil y sencilla.					
Observaciones:					
9. Los aplicativos se puede usar siempre sin presentar fallas técnicas.					
Observaciones:					

Anexo G: Carta para la validación de los instrumentos

 <p>Universidad de Caldas</p>	<p style="text-align: center;">UNIVERSIDAD DE CALDAS FACULTAD CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES MAESTRIA EN DIDACTICA DE LA MATEMÁTICA</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

CARTA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

Ciudad y Fecha

Título de la persona a quien se dirige

Nombre

Cargo

Lugar de desempeño

Estimado/a

Un saludo muy cordial, me permito enviarle la presente comunicación con el fin de solicitarle su valiosa colaboración para la validación en calidad de experto del instrumento que fue elaborado con el fin de recolectar la información necesaria para la investigación titulada:

Nombre del proyecto

Investigación que tiene como objetivo principal:

Esta investigación es realizada por el estudiante _____ como requisito para optar al título de _____. Si desea obtener más información puede comunicarse al correo electrónico _____

De antemano le agradezco su muy valiosa colaboración.

Atentamente,

Nombre

CC.

CEL.

Nombre del Instrumento:

Título de la Investigación:

Objetivo general:

Objetivos Específicos:

Anexo. Cuestionarios y matriz de evaluación.

VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

Aspectos específicos

Instrucciones: A continuación usted deberá leer el cuestionario que lo conforman xx ítems. Posteriormente se le entregará una rúbrica compuesta por cuatro categorías fundamentales: Suficiencia, Claridad, Coherencia y relevancia. Cada Categoría tiene 4 niveles de calificación, seguidos de una serie de indicadores. Usted deberá realizar la evaluación global del instrumento de acuerdo con cada categoría, su respectiva calificación y su indicador, para ello deberá marcar el nivel de calificación y el indicador respectivo, además puede hacer las observaciones pertinentes, de antemano muchas gracias por sus aportes y el tiempo que dedica a esta valoración.

Dimensión a evaluar:

Se especifica desde los autores las dimensiones

TÍTULO DEL INSTRUMENTO

Edad: _____

El siguiente cuestionario forma parte de una investigación que trata de descubrir algunas de las razones por las cuales los estudiantes...

Lee por favor cada pregunta con cuidado y contesta la mejor opción para ti. No hay respuestas correctas ni incorrectas, solamente me interesa tú punto de vista. Tú nombre se necesita para guiar la investigación, se debe saber a qué curso perteneces y qué compañeros tienes. Sin embargo, todas las respuestas son completamente confidenciales, los profesores no están relacionados con éste estudio y no conocerán tus respuestas. Toda información de identificación será quitada del cuestionario tan pronto como los datos se hayan reunido. La información que tú me proporciones no tendrá efecto en tu nota o disciplina. Gracias por tu participación en el estudio

Instrucciones

Te presento una serie de preguntas acerca de situaciones que ocurren a veces en las escuelas, liceos o colegios, para que tú respondas cómo ves la realidad de tu colegio. Puedes responder muy honestamente pues el cuestionario no será presentado al colegio es anónimo para la institución.

Tus respuestas son muy importantes para que tu colegio progrese, si es que tiene algunos problemas.

Para contestar el cuestionario, deberás señalar qué tanto ocurre cada situación en tu colegio, **marcando una X en el cuadrado que corresponda**, siguiendo esta clave:

¡Gracias por su participación!
Matriz de Rúbrica de Evaluación de expertos

A continuación se presenta la rúbrica. De acuerdo con los siguientes indicadores califique cada uno de los ítems según corresponda.

CATEGORÍA	CALIFICACIÓN	INDICADOR		
SUFICIENCIA Los ítems que pertenecen a una misma dimensión bastan para obtener la medición de ésta.	1. No cumple con el criterio	Los ítems no son suficientes para medir la dimensión		
	2. Bajo nivel	Los ítems miden algún aspecto de la dimensión pero no corresponden con la dimensión total		
	3. Moderado nivel	Se deben incrementar algunos ítems para poder evaluar la dimensión completamente.		
	4. Alto nivel	Los ítems son suficientes		
CLARIDAD El ítem se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.	1. No cumple con el criterio	Los ítems no son claros		
	2. Bajo nivel	Los ítems requieren bastantes modificaciones o una modificación muy grande en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de las mismas		
	3. Moderado nivel	Se requiere una modificación muy específica de algunos de los términos del o los ítems		
	4. Alto nivel	Los ítems son claros, tienen semántica y sintaxis adecuada		
COHERENCIA El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que	1. No cumple con el criterio	Los ítems no tiene relación lógica con la dimensión		
	2. Bajo nivel	Los ítems tienen una relación tangencial con la dimensión.		

está midiendo.	3. Moderado nivel	Los ítems tienen una relación moderada con la dimensión que está midiendo.		
	4. Alto nivel	Los ítems se encuentran completamente relacionados con la dimensión que se está midiendo.		
RELEVANCIA El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo.	1. No cumple con el criterio	Los ítems pueden ser eliminados sin que se vea afectada la medición de la dimensión.		
	2. Bajo nivel	Los ítems tienen alguna relevancia, pero otro ítem puede estar incluyendo lo mismo que mide éste.		
	3. Moderado nivel	Los ítems son relativamente importantes		
	4. Alto nivel	Los ítems son muy relevantes y deben ser incluidos todos en el cuestionario.		

Fuente: Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008)

Validado por:

_____ **Aplicable**

Validez:

_____ **No Aplicable**

Firma: _____

INFORMACIÓN ADICIONAL DEL EVALUADOR

Nombre completo:

CC

Anexo H: Evidencias fotográficas del trabajo

